



TITLE:

# 気泡群の力学に関する研究( Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

高比良, 裕之

---

CITATION:

高比良, 裕之. 気泡群の力学に関する研究. 京都大学, 1992, 博士(工学)

ISSUE DATE:

1992-11-24

URL:

<https://doi.org/10.11501/3064112>

RIGHT:

# 気泡群の力学に関する研究

1992

高比良裕之

# 目 次

第1章 序 論	1
1.1 本研究の背景	1
1.2 従来の研究	2
1.3 本研究の目的と内容のあらまし	9
第1章の参考文献	11
第2章 2個の気泡の力学	15
2.1 緒言	15
2.2 問題の設定	16
2.3 非圧縮性・非粘性流体中での2個の球形気泡の運動方程式	17
2.4 非圧縮性・非粘性流体中での2個の非球形気泡の運動方程式	21
2.4.1 座標系と境界条件	21
2.4.2 2個の気泡の運動方程式	24
2.5 粘性流体中での2個の非球形気泡の運動方程式	33
2.5.1 基礎方程式	33
2.5.2 粘性によるポテンシャル場からの変化	35
2.5.3 粘性を考慮した2個の気泡の運動方程式	37
2.6 Lagrangeの運動方程式を用いた2個の非球形気泡の解析	39
2.7 圧縮性流体中での2個の球形気泡の運動方程式	42
2.7.1 基礎方程式	42
2.7.2 圧縮性を考慮した2個の気泡の運動方程式	44
2.8 結言	46
第2章の参考文献	47
第3章 気泡群の力学	48
3.1 緒言	48
3.2 非圧縮性・非粘性液体中での気泡群の運動方程式	49
3.2.1 基礎方程式	49

3.2.2	$N$ 個の非球形気泡の運動方程式	51
3.3	気泡群の固有振動数	59
3.3.1	特性方程式	59
3.3.2	固有振動数	60
3.4	粘性を考慮した気泡群の運動方程式	64
3.5	圧縮性を考慮した球形気泡群の運動方程式	67
3.5.1	速度ポテンシャルと境界条件	67
3.5.2	$N$ 個の球形気泡の運動方程式	69
3.6	結言	71
	第3章の参考文献	72
第4章	境界要素法による数値解法	73
4.1	緒言	73
4.2	基礎方程式	75
4.3	計算方法	77
4.3.1	境界積分方程式の離散化	77
4.3.2	境界条件の離散化	78
4.4	計算精度の検討	81
4.5	結言	81
	第4章の参考文献	82
第5章	気泡の成長・崩壊問題	83
5.1	緒言	83
5.2	精度の検討	85
5.2.1	2個の気泡の理論	85
5.2.2	気泡群の理論	88
5.3	平面剛体壁近傍での単一気泡の崩壊	92
5.3.1	気泡の変形機構	92
5.3.2	気泡の初期形状の影響	98
5.3.3	表面張力の効果	100

5.4	曲面剛体壁近傍での単一気泡の崩壊	102
5.4.1	鏡像の気泡を用いた理論解析	102
5.4.2	境界要素法を用いた解析	106
5.5	粘性の効果	114
5.5.1	数値計算方法	114
5.5.2	気泡の崩壊	114
5.5.3	気泡の成長	119
5.6	気泡群の崩壊問題	122
5.6.1	角を持つ剛体壁近傍での単一気泡の挙動	122
5.6.2	気泡配置の効果	125
5.6.3	初期半径の影響	132
5.7	圧縮性の効果	144
5.7.1	初期半径の影響	145
5.7.2	気泡内気体の影響	152
5.8	結言	157
	第5章の参考文献	159
第6章	音場中での気泡の非線形振動	160
6.1	緒言	160
6.2	2個の気泡の非線形振動	161
6.2.1	問題の設定	161
6.2.2	計算方法	166
6.2.3	周波数応答曲線	167
6.2.4	ウルトラハーモニック振動とキャビテーションノイズ	174
6.3	気泡振動の分岐構造	182
6.3.1	気泡モデルの比較	183
6.3.2	気泡振動の分岐図	185
6.4	音場中での気泡の安定性	197
6.5	結言	203
	第6章の参考文献	205



第7章 結論	206
謝辞	209
付録	210

## 主 要 記 号

$a$	液体の音速
$a_{\infty}$	無限遠方での液体の音速
$B$	Tait の状態方程式の定数 (水に対して 304.7 MPa)
$b_{Im}$	気泡 $I$ の中心の移動量の $m$ 次成分 ( $m=-1,0,1$ ) <sup>†</sup>
$C$	剛体壁の中心
$C_D$	抗力係数
$E(m_*)$	第二種完全楕円積分
$\vec{e}_{r_I}$	$r_I$ 方向の単位ベクトル
$\vec{e}_{\theta_I}$	$\theta_I$ 方向の単位ベクトル
$\vec{e}_{\psi_I}$	$\psi_I$ 方向の単位ベクトル
$\mathcal{F}$	全エネルギー消散率の半分
$f_d$	音場の振動数
$f_{IN}$	気泡の固有振動数
$H_C$	剛体壁の曲率
$H_I$	気泡 $I$ の表面の平均曲率
$h$	エンタルピー
$h_{Iw}$	気泡 $I$ の表面でのエンタルピー
$I$	気泡 $I$
$i$	虚数単位
$J$	気泡 $J$
$K(m_*)$	第一種完全楕円積分
$\mathcal{K}$	運動エネルギー
$L_C$	剛体壁の中心と気泡中心との距離
$L_{IJ}$	気泡 $I$ と気泡 $J$ との中心間距離 <sup>‡</sup>
$L_{IJ0}$	初期状態における気泡 $I$ と気泡 $J$ との中心間距離 <sup>‡</sup>

<sup>†</sup>2 個の気泡の場合には添字  $m$  を省略する。

<sup>‡</sup>2 個の気泡の場合には添字  $I, J$  を省略する。

$\mathcal{L}$	Lagrangian
$N$	気泡の数
$\vec{n}_I$	気泡 $I$ の表面での法線ベクトル
$o$	静止座標系の原点
$o_I$	気泡 $I$ の中心
$P_n$	$n$ 次の Legendre 関数
$P_n^{[m]}$	$n, m$ 次の Legendre 陪関数
$p$	液体の圧力
$p_a$	圧力振幅
$p_C$	剛体壁中心での圧力
$p_{Ib}$	気泡 $I$ 内の気体圧力
$p_{Ig0}$	気泡 $I$ 内の非凝縮性気体の初期圧力
$p_{Iw}$	気泡 $I$ の表面での液体圧力
$p_v$	蒸気圧
$Q$	液体内の任意の点
$Re$	並進移動速度に関する Reynolds 数
$R_I$	気泡 $I$ の中心から気泡 $I$ の表面までの距離
$R_{Ic}$	気泡 $I$ 周辺での代表長さ
$R_{Ie}$	気泡 $I$ の初期平衡半径 (単一気泡ならびに同じ初期平衡半径の気泡群の解析の場合には, しばしば添字 $I$ を省略し, $R_e$ と表示する)
$R_{I0}$	$R_I$ における球形モード成分
$R_{I00}$	気泡 $I$ の初期半径
$R_{Inm}$	$R_I$ における $n, m$ 次の変形モード成分 ( $-n \leq m \leq n$ ) <sup>†</sup>
$r_I$	気泡 $I$ の中心を原点とする極座標系の成分
$S_I$	気泡 $I$ の形状を表す関数 ( $S_I = 0$ 気泡表面)
$T_l$	気泡の崩壊時間
$T$	応力テンソル
$t$	時間
$\mathcal{U}$	ポテンシャルエネルギー

$\vec{u}$	液体の速度ベクトル
$V_I$	気泡 $I$ の体積
$V_{Ib}$	$4\pi R_{I0}^3/3$
$\vec{v}_I$	気泡 $I$ の中心の並進移動速度ベクトル
$v_{Im}$	$\vec{v}_I$ の $m$ 次成分 ( $m = -1, 0, 1$ ) <sup>†</sup>
$v_{Imr}$	気泡 $I$ の中心の相対並進移動速度ベクトルの $m$ 次成分 ( $m = -1, 0, 1$ ) <sup>†</sup>
$w$	$R_{200}/R_{100}$ または $R_{2e}/R_{1e}$ <sup>§</sup>
$w_{IJ}$	$R_{J00}/R_{I00}$
$x$	静止デカルト座標系の成分
$x_I$	気泡 $I$ の中心を原点とするデカルト座標系の成分
$Y_{nm}$	$n, m$ 次の球面調和関数
$\bar{Y}_{nm}$	$Y_{nm}$ の共役複素数
$y$	静止デカルト座標系の成分
$y_I$	気泡 $I$ の中心を原点とするデカルト座標系の成分
$z$	静止デカルト座標系の成分
$z_I$	静止座標系に対する気泡 $I$ の中心の座標の $z$ 成分 (第 2 章), または気泡 $I$ の中心を原点とするデカルト座標系の成分 (第 3 章)
$\gamma$	ポリトロプ指数
$\varepsilon$	$R_{100}/L$
$\varepsilon_C$	$R_{00}/L_C$
$\varepsilon_{IJ}$	$R_{Ic}/L_{IJ0}$ <sup>††</sup>
$\zeta_{I-}$	$t - (r_I - R_{I0}(\zeta_{I-}))/a_\infty$
$\zeta_{IJ}$	$t - (L_{IJ} - R_{I0}(\zeta_{IJ}))/a_\infty$
$\theta_I$	気泡 $I$ の中心を原点とする極座標系の成分
$\theta_{IJ}$	$\vec{o_I o_J}$ の $\theta_I$ 成分
$\kappa$	Tait の状態方程式の定数 (水に対して 7.15)
$\mu$	粘性係数

<sup>†</sup> 2 個の気泡の場合にのみ用いる。

<sup>††</sup> 2 個の気泡の場合には添字  $J$  を省略する。



$\nu$	動粘性係数
$\rho$	液体の密度
$\rho_\infty$	無限遠方での液体の密度
$\sigma$	表面張力係数
$\varphi$	速度ポテンシャル
$\psi_I$	気泡 $I$ の中心を原点とする極座標系の成分
$\psi_{IJ}$	$\overrightarrow{o_I o_J}$ の $\psi_I$ 成分
$\vec{\omega}_I$	渦度
$\cdot$	時間微分

## 第1章 序 論

### 1.1 本研究の背景

液体の圧力がその温度における飽和蒸気圧より低下すると、液体は不安定な状態となり、液体中には分散した空洞が形成される。こうした空洞形成およびその後の諸過程はキャビテーション現象と呼ばれ、流体機械および水中推進機構の特性に重要な影響を及ぼす<sup>(1)~(3)</sup>。例えば、水力機械の壁面近傍に発生したキャビテーション気泡は、機械に激しい振動を引き起こし、騒音の原因となる。さらに重要なことは、気泡の崩壊時に発生する液体マイクロジェットあるいは気泡の再膨張(リバウンド)時に発生する衝撃波により材料が著しく損傷される(キャビテーションエロージョン)ことにある。このため、キャビテーション現象の解明は水力機械の性能向上を考える上で不可避な問題であり、古くから工学上の重要な研究課題となっている。

近年、キャビテーション現象はこうした工学的な問題にとどまらず、様々な分野で、新たな問題を提起している。医学の分野では、衝撃波フォーカシングによる体内結石破碎の際に衝撃波背後に現れる膨張波によりキャビテーションが発生し、生体組織を損傷させることが指摘されている<sup>(4)</sup>。また、物理学の分野では、音場中でのキャビテーションノイズが気泡振動の強い非線形性からカオスの挙動をとることが指摘されている<sup>(5)</sup>。このほかにも、音場中でのキャビテーションを利用した超音波洗浄や、キャビテーション気泡の半径が非常に小さくなり、その後再膨張する際の局所的な液体の高温、高圧を利用して化学反応を促進させること<sup>(6)</sup>などが行われている。

こうしたキャビテーションに起因する様々な現象を解明するためには、気泡群の微視的挙動を解明することが重要となる。しかし、厳密に気泡群の運動を解析するためには、界面現象を含む、連続、運動量、エネルギー方程式等をすべての気泡表面を境界とする自由境界のもとで解かねばならない。そのため、その解析は非常に困難なものとなり、現象に応じた適切なモデルの設定が必要となる。以下ではこれらの点を踏まえて、これまでに行われた気泡力学に関する研究を概説し、これまでの研究の問題点ならびに本研究の目的について述べる。



## 1.2 従来の研究

気泡の運動の本質を理解する上で最も基本的な解析モデルとして、無限空間内でのステップ状圧力変動のもとでの単一球形気泡の成長・崩壊問題が挙げられる。このモデルは、最初、Rayleigh<sup>(7)</sup>により解析され、その後様々な改良を経て現在も広く用いられている。Rayleigh は一様な圧力  $p_\infty$  の非圧縮・非粘性流体中で、半径  $R$  の球形気泡が崩壊するときの運動方程式を、気泡内気体圧力  $p_b$  が一定または等温変化するという仮定のもとで導出した。彼はこの論文の中で  $p_b$  が一定の場合に気泡半径が零になるまでの気泡の崩壊時間を求め、液体中に圧力の極大値があることを明らかにした。その後、Plesset<sup>(8)</sup>は Rayleigh の運動方程式に表面張力の効果を、Poritsky<sup>(9)</sup>は粘性の効果を考慮した。以上の三つのモデルは液体の方程式として Laplace 方程式を用いているため、気泡の収縮速度が液中音速に近づくにつれて適用できなくなるが、現象の理解には非常に有効なモデルであると考えられる。

球形気泡の運動に液体の圧縮性を考慮することは Herring<sup>(10)</sup>および Trilling<sup>(11)</sup>によりなされた。彼らは速度ポテンシャルが球面発散波に対する波動方程式を満足すると仮定して、Rayleigh の運動方程式に音速分の一を含む項まで圧縮性の効果を考慮した。また、Gilmore<sup>(12)</sup>は、波動方程式を用いる代わりに、圧力変動が音速と局所的流速の和で伝播するという、いわゆる Kirkwood-Bethe<sup>(13)</sup>の仮定に基づき、さらに高次の圧縮性の効果を考慮した球形気泡の運動方程式を導出している。Gilmore の導出した方程式は、後に Hicking と Plesset ら<sup>(14)</sup>による差分解と比較して非常に高い精度であることが確認された。液体の圧縮性に関する研究はその後数多くの研究者によりなされ<sup>(15)~(19)</sup>、近年 Prosperetti ら<sup>(20),(21)</sup>は特異摂動法を用いて解析することにより、これまでに導出された球形気泡の運動方程式に関する統一的な見解を提示している。こうした圧縮性に関する研究を通して、気泡内に非凝縮性ガスが入っている場合には気泡がリバウンドする際に衝撃波が形成されること、その際、気泡内気体圧力は数十 kbar のオーダーに達し、液体中の圧力の極大値は近似的に  $1/r$  ( $r$ :気泡中心からの距離) に比例して減衰することが明らかとなった。

Rayleigh の運動方程式の限界は、液体の圧縮性を考慮していないこと以外に、気液界面での熱・物質移動および気泡内気体の内部過程を考慮していないことにあ

る。通常、よく用いられる蒸気圧一定の仮定も、気泡の収縮速度が速くなるにつれて成り立たなくなる。これは、蒸気の凝縮速度が気泡の収縮速度に比べて十分速い間は、蒸気圧は一定と見なせるが、気泡崩壊の最終段階で収縮速度が音速に近づくと蒸気の凝縮が収縮に追いつかず、蒸気は圧縮され、非凝縮性気体のように振舞うためである。このような状況では蒸気の凝縮は気泡の運動に大きく影響する。Fujikawa ら<sup>(22)</sup>は蒸気の非平衡凝縮のために、蒸気泡から強い衝撃波が発生することを示している。また、Matsumoto ら<sup>(23)</sup>は気泡界面における非平衡な蒸発・凝縮、気泡内の均一核生成による凝縮液滴の発生・成長等を考慮した運動方程式を導出し、気泡はその内部におけるミストの生成により、見かけ上、等温的に成長することを明らかにした。

以上述べた無限空間内の単一球形気泡の解析は、いくつかの点で大きな問題がある。まず第一に、気泡の球形からの変形である。これは、なんらかの形で挿入する外乱が気泡の安定性にいかなる効果を及ぼすかということである。非球形気泡の解析は Plesset ら<sup>(24),(25)</sup>によりなされた。彼らは球面調和関数を用いて気泡壁を摂動展開し、非圧縮・非粘性流体中での気泡表面の線形安定方程式を導出した。その結果、蒸気泡の成長においては、初期の球形からの変動は一定値に収束し、気泡は安定となるが、崩壊過程では変動は半径の  $-1/4$  乗に比例して不安定が助長されることが示された<sup>(25)</sup>。その後、Chapman ら<sup>(26)</sup>により数値的に気泡の安定性が議論され、Plesset らの線形安定理論は崩壊の大部分の過程でよい精度であることが示された。Prosperetti ら<sup>(27),(28)</sup>および Ceschia ら<sup>(29)</sup>は後に安定方程式に粘性の効果を考慮した。気泡の並進運動を考慮した気泡変形の解析は Hermans<sup>(30)</sup>によりなされている。

気泡の安定性とも関連して、キャビテーションエロージョンの解明には剛体壁近傍の気泡の挙動を解析する必要がある。剛体壁の存在を考慮すると、圧力場および流れ場の非対称性から気泡は一般に変形する。そのため、少なくとも軸対称な気泡の変形を解析する必要がある。この問題は液体の粘性を無視し、ポテンシャル問題として扱えば、平面剛体壁を鏡像気泡により置き換えることにより、剛体壁に対称な位置に配置された同じ大きさの2個の気泡の問題として解析される。気泡崩壊過程でマイクロジェットが形成され、それらがエロージョンの原因になり得



ることは古くから指摘されていたが、それを最初に示したのは Naudé ら<sup>(31)</sup>である。彼らは、Plesset らの線形変形理論に基づき、剛体壁に付着した半球からわずかにずれた気泡の剛体壁の反対側の気泡壁の変形が助長され、マイクロジェットが形成される可能性を示し、その結果が、電気スパークにより発生させた気泡の崩壊に関する実験とよく一致することを示した。その後、Benjamin ら<sup>(32)</sup>および Kling ら<sup>(33)</sup>によりマイクロジェットの計測が試みられた。剛体壁近傍の気泡の崩壊過程における変形を、解析的に捕らえることは難しく、空洞気泡から発生するマイクロジェットの形成は Plesset ら<sup>(34)</sup>の数値解析により初めて示された。彼らは差分法により、非圧縮・非粘性流体中での気泡の崩壊を解析し、マイクロジェットの速度は 100m/s のオーダーであることを示した。後に彼らの数値解は Lauterborn ら<sup>(35)</sup>の実験により定性的によく一致することが確かめられた。Lauterborn らの実験は Q-スイッチ・ルビーレーザを集束させることにより液中に気泡を発生させ、それを高速度カメラで撮影したもので、この種の実験はその後多くの研究者により行われている<sup>(36)~(39)</sup>。その後、Shima ら<sup>(40)</sup>は、剛体壁に付着した気泡の解析を行い、ガス気泡の場合には、マイクロジェットが弱められること、また、蒸気泡の場合にはマイクロジェットがキャビテーション損傷に重要な役割を果たすことを示している。

1980 年代に入ると、計算機の発展にともない、新たな数値解析方法が用いられるようになった。その代表的な方法は境界要素法による方法で、ポテンシャル問題の場合、問題の空間次元が Green の公式により一次元減少することを利用し比較的短い計算時間で現象が捕らえられるようになった。最初に、境界要素法を用いた解析は Guerri ら<sup>(41)</sup>により行われ、よい精度で変形を捕らえられることが示された。その後、Blake らは剛体壁<sup>(42)</sup>ならびに自由境界近傍<sup>(43)</sup>の気泡の変形を解析し、自由境界の場合ジェットの向きが逆転することを示した。最近、Chahine ら<sup>(44)</sup>は境界要素法を用いて、気泡の 3 次元変形を扱っている。有限要素法による解析は島ら<sup>(45)</sup>によりなされている。

ところで、現実のキャビテーションエロージョンではいったん壁面のある場所に損傷が生じると、それがさらに助長されることが知られている。こうした損傷の機構の解明にはこれまでに行われた平面剛体壁近傍の気泡の挙動では不十分であ

り、壁面の形状が気泡の崩壊に及ぼす効果を解明する必要がある。この問題は液滴の衝突を取り扱った Dear ら<sup>(46)</sup>により実験的に考察されているが、気泡に関する理論的な解析は十分になされていない。

さて、多数の気泡が複雑に成長・崩壊を繰り返している現実のキャビテーション現象を考える上では、当然のことながら単一気泡の解析で十分なのかという疑問が生じる。実際、Arakeri ら<sup>(47)</sup>はキャビテーション係数が大きくなるにつれてキャビテーションノイズに気泡間の相互作用が現れていることを実験的に示している。また、真田ら<sup>(48)</sup>は磁歪振動子の表面近傍に存在する気泡群から多数の強い衝撃波を観測しており、その発生原因を、衝撃波の発生源近くにある気泡群が衝撃波の作用を受けて、さらに激しく崩壊するためと推論している。しかし、これまでに気泡間の相互作用を理論的に取り扱った研究は少なく、理論解析は主に 2 個の球形気泡の運動に限られていた。上述したように、同じ大きさの 2 個の気泡の問題は特別な場合として平面剛体壁近傍での単一気泡の問題と等価である。Shima<sup>(49)</sup>は非圧縮性・非粘性流体中での 2 個の球形気泡の運動方程式を導出し、それらの固有振動数を求めている。また、Wraith ら<sup>(50)</sup>は並進運動を考慮した 2 個の球形気泡の解析を行い、オリフィスより流れる気泡の挙動に応用している。Miloh は<sup>(51)</sup>一般に、ポテンシャル流体中で球形を保つ 2 個の物体の相互作用を、膨脹・収縮および並進運動を考慮して代表的な幾何学的配置のもとで解析している。彼が用いた幾何学的配置は、無限空間内に置かれた 2 個の球の場合や一方の球の内側にもう一つの球がある場合などである。前者の問題は Wraith らの液体中の 2 個の気泡の問題と本質的に同じである。一方、Chahine<sup>(52),(53)</sup>はポテンシャル流体中の気泡群の挙動を特異摂動法を用いて解析し、気泡の変形を取り扱った。その後、Chahine と Bovis<sup>(54)</sup>はこの理論の特別な場合として、剛体壁近傍の気泡の挙動を解析し、Chahine と Liu<sup>(55)</sup>は熱伝導を考慮して、過熱状態の蒸気泡の膨張問題を扱っている。しかし、彼らの一連の解析は特定の 1 個の気泡と特異点の集合としての気泡群との相互作用を扱ったものであり、気泡の運動は気泡中心と気泡群の中心とを結ぶ軸に対して軸対称な運動に限られていた。そのため、気泡の 3 次元的な挙動は扱うことができず、本質的には 2 個の気泡の挙動と同じであった。また、この理論は後述するようにいくつかの不備な点がある。2 個の気泡の運動の解析



は気泡間の相互作用の本質を理解する上で最も基本的な問題であるが、より厳密に複数個の気泡群の挙動を扱うことが必要となろう。

気泡群の挙動を扱う方法としては、大きく分けて、上述したような気泡の変形等を含めた個々の気泡の微視的な運動を解析する方法と、個々の気泡の運動は考えず、平均化した気液二相流の方程式を用いて巨視的な気泡群の挙動を扱う方法がある。いわゆる気液二相流の解析では後者の方法で平均的な場を考えることが多い。平均化した方程式においては、一般に気相と液相の体積率が問題になり、液相は非圧縮性と仮定しても気相の体積変化から流体全体としては、密度変化が生じ、波動の伝播を扱うことができる<sup>(56)</sup>。Omta<sup>(57)</sup>およびd'Agostinoら<sup>(58)</sup>はこうした立場で球状に分布した球形気泡群の振動について解析し、気泡群の固有振動数が単一気泡の固有振動数に比べて低下することを示している。平均化した気液二相流の解析は、複雑な自由境界を意識して解析する必要がないため、巨視的現象の解析には有効であるが、キャビテーションに起因する微細な構造の解析にはやはり、個々の気泡の挙動を正確に解析する必要がある。

無限空間内でのステップ状の圧力変動のもとでの気泡の解析とともに、音場中での気泡の挙動の解析はいわゆる音響キャビテーション現象を解明するために重要となる。一般に、液体中に超音波を照射すると、ある音圧レベル以上では、キャビテーションが発生する<sup>(59)</sup>。このようなキャビテーションを通常のキャビテーションと区別して音響キャビテーションと呼ぶこともある。超音波によるキャビテーションは強力超音波が液相系に生ずる種々の化学作用・機械的作用・生物学的作用などの原因となり、超音波洗浄・脱気などの超音波応用技術の基礎をなす点で極めて重要である<sup>(60),(61)</sup>。

Rayleighの導出した気泡の運動方程式は、音場中での気泡を解析する上でも最も基本的であり、Noltingkら<sup>(62)</sup>により初めてこの種の問題に適用された。気泡の半径方向の振動は運動方程式の持つ強い非線形性から物理的にも非常に興味深い特性を示す。特に、キャビテーションノイズに現れる非線形効果は数多くの研究者により解析されている。一般に、音場中でキャビテーションが発生し始めると、音場の振動数の1/2倍のサブハーモニックキャビテーションノイズが計測される。この事実はEsche<sup>(63)</sup>により最初に示され、キャビテーションの初生を表す

重要な指標となっている。このサブハーモニックノイズの原因は最初、ある音圧以上になると、気泡が音場の2倍の周期で激しく崩壊するため<sup>(61)</sup>、または、拡散により気泡の共振半径よりも大きくなった気泡が、音場の振動数の1/2倍でサブハーモニック振動しているため<sup>(64)~(67)</sup>と考えられていた。しかし、これらの解釈は、実験では音場中に共振半径より大きな気泡が存在しないことなどのいくつかの事実に矛盾することがProsperetti<sup>(68)</sup>およびLauterborn<sup>(69)</sup>により指摘されている。Prosperetti<sup>(68),(70)</sup>は理論的にRayleigh-Plessetの運動方程式を解析し、ハーモニック振動している気泡が崩壊する他の気泡から放射される弱い衝撃波などの外乱を受けることにより、サブハーモニック成分を含む振動を起こすという仮説を提案している。そのため、サブハーモニック成分を発する気泡は主に、キャビテーションの初生のモニターの役目を果たし、直接にはキャビテーション現象に関与していないと考察している。一方、Lauterborn<sup>(69)</sup>は、Rayleigh-Plessetの運動方程式を様々な圧力振幅・振動数のもとで数値積分し、単一気泡の周波数応答曲線を求めることにより、サブハーモニックノイズが共振半径より小さな気泡から発生するウルトラハーモニック振動に起因する可能性を指摘した。その後、Cramer<sup>(71)</sup>はGilmoreの式を数値解析することにより、圧縮性を考慮した場合の単一気泡の周波数応答曲線を得た。LauterbornおよびCramerの解析では、圧力振幅が高くなると定常解が得られないことが指摘されているが、これは後にカオス現象と関連していることが明らかとなった。非Newton流体中での気泡の非線形振動はShimaら<sup>(72)</sup>により解析されている。

音場中での気泡振動においても気泡の安定性は重要な研究課題である。Hsiehら<sup>(73),(74)</sup>はPlessetの導出した安定方程式を用いて、音場に同期し、微小振動している気泡の安定性を解析し、気泡の不安定がパラメータ励振により引き起こされることを指摘している。その後、Francescutto<sup>(75)</sup>は気泡に生ずる表面波の発生の音圧のしきい値を計算し、実験と比較的よく一致することを示している。

さて、1975年にLi-Yorke<sup>(76)</sup>によりカオスの概念が導入されると、1980年代には音響キャビテーションにもこうした立場での気泡振動の解析が行われるようになった。これまで、音響キャビテーションノイズは統計的な現象として処理されていたが<sup>(60)</sup>、LauterbornとCramer<sup>(77)</sup>により、同一振動数のもとで線形に音圧を上



昇させるとキャビテーションノイズが周期倍化しカオスに至る過程が実験的に示されると、キャビテーションノイズが決定論的な現象であり、カオスと密接に関連していることが認識されるようになった。また、Lauterborn と Suchla<sup>(78)</sup>は理論的にも Gilmore の式を用いることにより、音圧を上昇させると気泡振動は周期倍化しながらカオスに至ることを示した。その後の実験で音響キャビテーションノイズの相関次元は約 2.5 であることを示している<sup>(79)</sup>。Lauterborn らは一連の実験から、音響キャビテーション場における気泡間の相互作用の効果を解析することの必要性を述べている<sup>(80)</sup>。なぜなら、現実の音響キャビテーション場は無数に近い気泡から構成されているからである。その後、Parlitz ら<sup>(81)</sup>は、音場の振動数を変化させたときの単一球気泡の分岐構造およびそのストレンジアトラクター等を解析している。

通常、音場中での気泡の挙動を解析する際には、気泡内の非凝縮性気体はポリトロップ変化することを仮定することが多いが、Prosperetti ら<sup>(82),(83)</sup>は気泡内気体の熱過程によるエネルギー散逸を考慮して、単一球気泡の非線形振動特性を解析し、ポリトロップ変化の仮定の限界を論じている。また、Matsumoto ら<sup>(84)</sup>は、気泡内部における均一核凝縮、蒸気および非凝縮性気体の相互拡散などの内部現象を考慮した単一球気泡の解析を行い、内部現象により気泡は振動圧力場に同調しやすくなること等を示した。

ところで、超音波によるキャビテーションでは、気泡が崩壊する際に気泡内気体は非常に高温・高圧になり、気泡から光の発生が見られる<sup>(60),(61)</sup>。この現象を音響ルミネッセンスという。近年、Gaitan<sup>(85)</sup>はこのルミネッセンス発光を計測することにより、音場中での気泡の挙動を解析している。

### 1.3 本研究の目的と内容のあらまし

前節で述べたように、これまでに行われた気泡力学に関する研究の大部分は単一気泡の理論に関するものといえてよく、複数個の気泡を扱った研究も、主に非圧縮性・非粘性流体中での球形または軸対称変形する気泡の解析に限られていた。そのため、気泡間の相互作用がキャビテーション現象に及ぼす効果はいまだ十分に解明されているとはいえない。そこで、本研究では、個々の気泡の半径方向の運動、並進運動および変形を考慮した任意の位置に分布している  $N$  個の気泡群の力学を構築し、相互作用がキャビテーションに起因する様々な現象に及ぼす効果を明らかにすることを目的とする。特に以下の点に重点をおき解析を行う。

- (1) 気泡間の相互作用が気泡の並進運動および変形に及ぼす効果を解明する。
- (2) 気泡間の相互作用を考慮したときに、液体の粘性および圧縮性が気泡の挙動に及ぼす効果を解明する。
- (3) 相互作用がマイクロジェットおよび衝撃波の形成に及ぼす効果を解明する。
- (4) 剛体壁の形状がマイクロジェットの形成および発生衝撃圧に及ぼす効果を解明する。
- (5) 気泡間の相互作用が気泡の非線形振動特性およびキャビテーションノイズに及ぼす効果を解明する。

本論文は以下のように構成されている。まず第 2 章では、気泡間の相互作用の基本的な性質を把握するために、最初、非圧縮・非粘性流体中での 2 個の球形および非球形気泡の運動方程式を導出する。次にこれらの方程式に液体の粘性および圧縮性の効果を考慮する。

第 3 章では、2 個の気泡の理論を拡張し、3 次元並進運動・変形を考慮して、任意の位置に分布している  $N$  個の気泡群の運動方程式を導出する。また、気泡群の自由振動に関する特性方程式を導出し、気泡群の固有振動数に及ぼす相互作用の効果を解析する。

第 4 章では境界要素法を用いた軸対称気泡群の解析に必要な理論解析を行う。

第 5 章では第 2 章から第 4 章までに得られた解析結果を用いて、ステップ状の圧力変動のもとでの気泡の成長および崩壊問題を解析する。第 5 章の解析では、気



泡の崩壊問題における気泡の変形機構ならびに発生衝撃圧力に及ぼす相互作用の効果の解明に重点をおき、あわせて理論の特別な場合として、様々な形状の剛体壁近傍での気泡の挙動を取り扱う。

第6章では音場中での気泡群の挙動を解析し、その非線形振動特性を明らかにする。特に、キャビテーションノイズと相互作用との関連ならびにカオス現象と相互作用との関連の解明に重点をおく。

第7章は結論である。

## 第1章の参考文献

- (1) Knapp, R. T., et al., *Cavitation*, (1970), McGraw-Hill Book Company.
- (2) Hammit, F. G., *Cavitation and Multiphase Flow Phenomena*, (1980), McGraw-Hill Book Company.
- (3) 加藤, キャビテーション, (1980), 槇書店.
- (4) Grönig, H., *Proc. Int. Workshop on Shock Wave Focusing*, Sendai, (1989), 1.
- (5) Schuster, H. G., *Deterministic Chaos*, (1984), Physik-Verlag.
- (6) サスリック, K. S. (野村浩康 訳), サイエンス, (1989), 4月号, 88.
- (7) Rayleigh, Lord, *Phil. Mag.*, **34**(1917), 94.
- (8) Plesset, M. S., *J. Appl. Mech.*, **16**(1949), 277.
- (9) Poritsky, H., *Proc. 1st U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, (1952), 813.
- (10) Herring, C., *Columbia Univ. NDRC Rep.*, C-4-sr10-010(1941).
- (11) Trilling, L., *J. Appl. Phys.*, **23**(1952), 14.
- (12) Gilmore, F. R., *Calif. Inst. of Tech. Hydrodyn. Lab. Rep.*, **26-4**(1952).
- (13) Kirkwood, J. G., and Bethe H. A., *OSRD Rep.*, (1942), 588.
- (14) Hickling, R., and Plesset M. S., *Phys. Fluids*, **7**(1964), 7.
- (15) Keller, J. B., and Kolodner, I. I., *J. Appl. Phys.*, **27**(1956), 1152.
- (16) Jahsman, W. E., *J. Appl. Mech.*, **35**(1968), 579.
- (17) Flynn, H. G., *J. Acoust. Soc. Am.*, **57**(1975), 1379.
- (18) Tomita, Y., and Shima, A., *Bull. JSME*, **20**(1977), 1453.
- (19) Keller, J. B., and Miksis, M., *J. Acoust. Soc. Am.*, **68**(1980), 628.
- (20) Prosperetti, A., and Lezzi, A., *J. Fluid Mech.*, **168**(1986), 457.
- (21) Lezzi, A., and Prosperetti, A., *J. Fluid Mech.*, **185**(1987), 289.
- (22) Fujikawa, S., and Akamatsu, T., *J. Fluid Mech.*, **97**(1980), 481.
- (23) Matsumoto, Y., and Beylich, A. E., *J. Fluids Eng.*, **107**(1985), 281.
- (24) Plesset, M. S., *J. Appl. Phys.*, **25**(1954), 96.
- (25) Plesset, M. S., and Mitchell, T. P., *Q. Appl. Math.*, **13**(1956), 419.
- (26) Chapman, R. B., and Plesset, M. S., *J. Basic. Eng.*, **94**(1972), 142.



- (27) Prosperetti, A., *Q. Appl. Math.*, **34**(1977), 339.
- (28) Prosperetti, A. and Seminara, G., *Phys. Fluids*, **21**(1978), 1465.
- (29) Ceschia, M., and Nabergoj, R., *Phys. Fluids*, **21**(1978), 140.
- (30) Hermans, J., *Ph.D Thesis*(Technical University of Eindhoven), (1973).
- (31) Naudé, C. F., and Ellis, A. T., *J. Basic Eng.*, **83**(1961), 648.
- (32) Benjamin, T. B., and Ellis, A. T., *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A*, **260**(1966), 221.
- (33) Kling, C. L., and Hammit, F. G., *J. Basic Eng.*, **94**(1972), 825.
- (34) Plesset, M. S., and Chapman, R. B., *J. Fluid Mech.*, **47**(1971), 283.
- (35) Lauterborn, W., and Bolle, H., *J. Fluid Mech.*, **72**(1975), 391.
- (36) Lauterborn, W., *Cavitation and Inhomogeneities in Underwater Acoustics*, (1980), 3, Springer-Verlag.
- (37) Tomita, Y., and Shima, A., *J. Fluid Mech.*, **169**(1986), 535.
- (38) Tomita, Y., and Shima, A., *Acustica*, **71**(1990), 161.
- (39) Testud-Giovannesi, P., et al., *J. Appl. Phys.*, **67**(1990), 3560.
- (40) Shima, A., and Nakajima, K., *J. Fluid Mech.*, **80**(1977), 369.
- (41) Guerri, L., et al., *Proc. 2nd Int. Colloq. on Drops and Bubbles*, (1982), 175.
- (42) Blake, et al., *J. Fluid Mech.*, **170**(1986), 479.
- (43) Blake, et al., *J. Fluid Mech.*, **181**(1987), 197.
- (44) Chahine, G. L., et al., *Proc. Cavitation and Multiphase Flow Forum*, Portland, **109**(1991), 49.
- (45) 中島・島, 東北大学速研報告, **40**(1977), 27.
- (46) Dear, J. P., and Field, J. E., *J. Appl. Phys.*, **63**(1988), 1015.
- (47) Arakeri, V. H., and Shanmuganathan, V., *J. Fluid Mech.*, **159**(1985), 131.
- (48) 真田・ほか3名, 機論, **50**, B(1984), 2275.
- (49) Shima, A., *J. Basic Eng.*, **93**(1971), 426.
- (50) Wraith, A. E., and Kakutani, T., *Chem. Eng. Sci.*, **29**(1974), 1.
- (51) Miloh, T., *J. Eng. Math.*, **11**(1977), 349.
- (52) Chahine, G. L., *Proc. IAHR Symp. on Operating Problems of Pump Stations and Power Plants*, Amsterdam, **2-1**(1982), 1.
- (53) Chahine, G. L., *Proc. 14th Symp. on Naval Hydrodynamics*, Ann Arbor, Michigan, (1983), 165, National Academy Press.
- (54) Chahine, G. L., and Bovis, A. G., *J. Fluids Eng.*, **105**(1983), 356.
- (55) Chahine, G. L., and Liu, H. L., *J. Fluid Mech.*, **156**(1985), 257.
- (56) たとえば van Wijngaarden, L., *Ann. Review of Fluid Mech.*, **4**(1972), 369.
- (57) Omta, R., *J. Acoust. Soc. Am.*, **82**(1987), 1018.
- (58) d'Agostino, L., and Brennen, C. E., *J. Fluid Mech.*, **199** (1989), 155.
- (59) 超音波技術便覧, 日刊工業新聞社(改訂2版), (1968).
- (60) 能本, 日本音響学会誌, **28**(1972), 348.
- (61) 能本, 日本音響学会誌, **28**(1972), 417.
- (62) Noltingk, B. E., and Neppiras, E. A., *Proc. Phys. Soc. London. Sect. B* **63**(1950), 647.
- (63) Esche, R., *Acustica*, **AB 2**(1952), 208.
- (64) Güth, W., *Acustica*, **6**(1956), 532.
- (65) Neppiras, E. A., *J. Sound Vib.*, **10**(1969), 176.
- (66) Neppiras, E. A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **46**(1969), 587.
- (67) Eller, A., and Flynn, H. G., *J. Acoust. Soc. Am.*, **46**(1969), 722.
- (68) Prosperetti, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **57**(1975), 810.
- (69) Lauterborn, W., *J. Acoust. Soc. Am.*, **59**(1976), 283.
- (70) Prosperetti, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **56**(1974), 878.
- (71) Cramer, E., *Cavitation and Inhomogeneities in Underwater Acoustics*, (1980), 54, Springer-Verlag.
- (72) Shima, A., et al., *J. Acoust. Soc. Am.*, **77**(1985), 1702.
- (73) Hsieh, D. Y., and Plesset, M. S., *J. Acoust. Soc. Am.*, **33**(1961), 206.
- (74) Hsieh, D. Y., *J. Acoust. Soc. Am.*, **56**(1974), 392.
- (75) Francescutto, A., and Nabergoj, R., *Acustica*, **41**(1978), 215.
- (76) Li, T. Y., and Yorke, J. A., *Am. Math. Monthly*, **82**(1975), 985.



- (77) Lauterborn, W., and Cramer, E., *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1445.
- (78) Lauterborn, W., and Suchla, E., *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 2304.
- (79) Lauterborn, W., et al., *Proc. Int. Symp. on Cavitation*, Sendai, **2**(1986), 9.
- (80) Lauterborn, W., *Frontiers in Physical Acoustics*, (1986), 124. North-Holland.
- (81) Parlitz, U., et al., *J. Acoust. Soc. Am.*, **88**(1990), 1061.
- (82) Prosperetti, A., et al., *J. Acoust. Soc. Am.*, **83**(1988), 502.
- (83) Kamath, V., and Prosperetti, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **85**(1989), 1538.
- (84) Matsumoto, Y., and Watanabe, M., *JSME Int. J.*, Series II, **32**(1989), 157.
- (85) Gaitan, D. F., Ph.D. Thesis(The Univ. of Mississippi), (1990).

## 第2章 2個の気泡の力学

### 2.1 緒言

本章では、気泡間の相互作用の本質を理解する第一歩として、2個の気泡の運動方程式を導出する。非圧縮・非粘性流体中での2個の球形気泡の運動方程式は、Shima<sup>(1)</sup>, Wraithら<sup>(2)</sup>, Miloh<sup>(3)</sup>により導出されているが、本研究では、より厳密に気泡間の相互作用に起因する気泡の並進運動・変形を考慮して解析を行う。

本章は以下のように構成されている。まず、2.2節では本章での問題の設定、座標系および各節で共通に用いる仮定について述べる。2.3節では液体の圧縮性、粘性の効果および気泡の並進運動・変形を無視したときの、2個の球形気泡の運動方程式を導出し、半径方向の運動に及ぼす相互作用の効果について考察する。次に、2.4節では非圧縮・非粘性の仮定のもとで、気泡間の相互作用に起因する気泡の並進運動および変形を考慮した運動方程式を導く。2.5節では、2.4節で得られた運動方程式を拡張し、液体の粘性の効果を検討する。2.6節では2.5節と同様の運動方程式を粘性散逸を考慮したLagrangeの運動方程式を用いて導出し、2.5節の結果の物理的考察を行う。最後に2.7節では音波近似に基づき、液体の圧縮性を考慮した球形気泡の運動方程式を導出する。

## 2.2 問題の設定

図 2.1 に示すように最初、液体中で 2 個の球形気泡が平衡を保っている状況を考える。ある瞬間に気泡周囲の液体圧力が一様に変化するときの気泡の運動方程式を導出する。本問題は 2 個の気泡中心を結ぶ軸に対して軸対称となる。ここで、それぞれの気泡の中心を  $o_1$  および  $o_2$ 、気泡中心間距離を  $L$ 、液体中の任意の点を  $Q$  とし、 $o_1$  および  $o_2$  を原点とする極座標系  $(r_1, \theta_1)$  および  $(r_2, \theta_2)$  を定義する。本章では共通に以下の仮定を用いる。

- (1) 気泡内には蒸気と非凝縮性気体が入っているものとし、蒸気圧は初期条件で設定される気泡表面での温度に対する飽和蒸気圧に常に等しく (蒸気圧は一定)、非凝縮性気体はポリトロップ変化するものとする。
- (2) 気泡内部および気泡表面での熱および物質移動は仮定 (1) を満足するように自動的に実現される。
- (3) 重力の影響を無視する。
- (4) 気泡内の気体密度は液体の密度に比べ十分小さいものとし、気体の質量を無視する。
- (5) 無限遠方では液体が静止している。

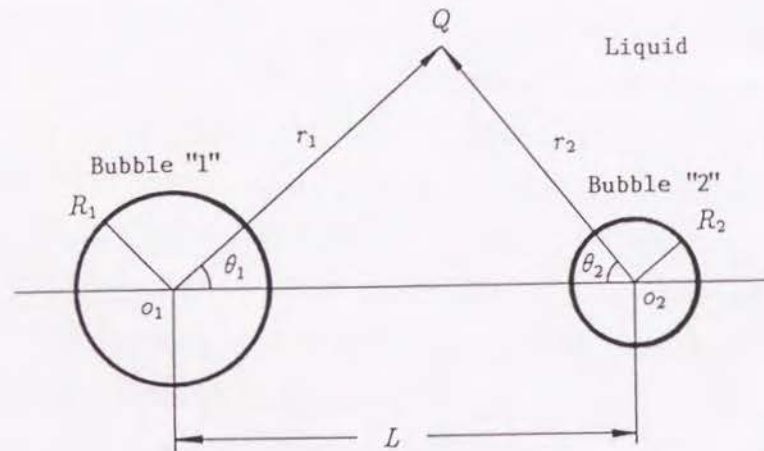


図 2.1 静止座標系

## 2.3 非圧縮性・非粘性流体中での 2 個の球形気泡の運動方程式

本節では前節の仮定に加え、以下の仮定を追加する。

- (a) 周囲液体の圧縮性および粘性を無視し、流れは渦なしとする。
- (b) 気泡の並進運動および変形を無視する。

仮定 (a) より液体に対して速度ポテンシャル  $\varphi$  が定義され、 $\varphi$  は Laplace 方程式を満たす。 $\varphi$  は仮定 (5) より次式のように与えられる。

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{1n}(t)}{r_1^{n+1}} P_n(\cos \theta_1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{2n}(t)}{r_2^{n+1}} P_n(\cos \theta_2) \quad (2.1)$$

ここで、 $t$  は時間、 $q_{1n}(t)$ 、 $q_{2n}(t)$  は時間を変数とする未知関数、 $P_n$  は  $n$  次の Legendre 関数、添字 1 および 2 はそれぞれ気泡 1 および気泡 2 に対する諸量を表している。 $\varphi$  の空間微分は、 $r_1$  および  $r_2$  を無限大にすると零に漸近することから無限遠方で液体が静止していることを満足する。

さて、以下の解析では次式で示す Legendre 関数の関係式<sup>(4)</sup>を用いる。

$$\frac{P_n(\cos \theta_J)}{r_J^{n+1}} = \frac{1}{n! L^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!} \left(\frac{r_I}{L}\right)^m P_m(\cos \theta_I), \quad r_I < L \quad (2.2)$$

特に、 $n=0$  の場合には式 (2.2) は以下ようになる。

$$\frac{1}{r_J} = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r_I}{L}\right)^m P_m(\cos \theta_I), \quad r_I < L \quad (2.3)$$

ここで、 $I=1$  の場合には  $J=2$ 、 $I=2$  の場合には  $J=1$  とする。式 (2.2) より、式 (2.1) は気泡  $I$  周辺で座標系  $I$  の変数を用いて次のように書き表される。

$$\varphi(r_I, \theta_I, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_{In}(t)}{r_I^{n+1}} P_n(\cos \theta_I) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m! n!} \frac{q_{Jm}(t)}{L^{m+1}} \left(\frac{r_I}{L}\right)^n P_n(\cos \theta_I), \quad r_I < L \quad (2.4)$$

式 (2.4) は、 $r_I < L$  の場合にのみ有効であるが、この制約は気泡の運動方程式の導出にはなんら影響しない。

気泡表面は以下のように表現される。



$$S_I = r_I - R_{I0}(t) = 0 \quad (2.5)$$

ここで,  $R_{I0}$  は気泡半径を表している.

気泡表面での境界条件は次の二式で与えられる.

$$\frac{\partial S_I}{\partial t} + \nabla_I \varphi \cdot \nabla_I S_I = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla_I \varphi|^2 + \frac{1}{\rho} (-p_\infty + p_{Ib} - 2\sigma H_I) = 0 \quad (2.7)$$

ここで,  $\nabla_I$  は座標系  $I$  で定義される勾配,  $\rho$  は密度,  $p_\infty$  は無限遠方圧力,  $p_{Ib}$  は気泡内気体圧力,  $\sigma$  は表面張力係数,  $H_I$  は平均曲率を表している. 式(2.6)は気泡表面を流体が貫かないことを表し, 式(2.7)は気泡表面での圧力の釣り合いを表している. 式(2.7)中の平均曲率  $H_I$  は式(2.5)を用いると

$$H_I = \frac{1}{R_{I0}} \quad (2.8)$$

と表される. 圧力  $p_{Ib}$  は仮定(1)より次のように与えられる.

$$p_{Ib} = p_v + p_{I0} \left( \frac{R_{I00}}{R_{I0}} \right)^{3\gamma} \quad (2.9)$$

ここで,  $p_v$  は蒸気圧,  $p_{I0}$  は非凝縮性気体の初期圧力,  $R_{I00}$  は気泡の初期半径を,  $\gamma$  はポリトロップ指数を表している.

式(2.4),(2.5)を境界条件式(2.6)に代入し, Legendre 関数の直交性<sup>(4)</sup>

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_m P_n d(\cos \theta_I) &= \frac{2}{(2n+1)}, \quad m=n \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (2.10)$$

を用いると以下の式が得られる.

$$q_{I0} = -R_{I0}^2 \dot{R}_{I0} \quad (2.11)$$

$$\frac{(n+1)q_{In}}{R_{I0}^{n+2}} = \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{R_{I0}}{L} \right)^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!} \cdot \frac{q_{Jm}}{L^{m+2}}, \quad n \geq 1 \quad (2.12)$$

ここで, “ $\dot{\phantom{x}}$ ” は時間微分を表している. 式(2.11),(2.12)を変形すると

$$\hat{g}_{In} = -\delta(n) + \frac{n\hat{h}_{IJ}}{(n+1)!} \left( \frac{R_{I0}}{L} \right)^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{g}_{Jm} \frac{(m+n)!}{m!} \left( \frac{R_{J0}}{L} \right)^{m+2} \quad (2.13)$$

を得る. ここで,

$$\hat{g}_{In} = \frac{q_{In}}{R_{I0}^{n+2} \dot{R}_{I0}} \quad (2.14)$$

$$\hat{h}_{IJ} = \frac{\dot{R}_{J0}}{R_{I0}} \quad (2.15)$$

また,  $n=0$  のとき  $\delta(n)=1$ ,  $n \neq 0$  のとき  $\delta(n)=0$  である. 以上の式は Miloh<sup>(3)</sup> による結果と一致している. 特別な場合として,  $R_{I0}=R_{J0}$ ,  $\hat{h}_{IJ}=\pm 1$  のときには  $\hat{g}_{In}=\hat{g}_{Jn}$  となり,  $\hat{g}_{In}$  は次のように与えられる.

$$\hat{g}_{In} = -\delta(n) + \frac{n\hat{h}_{IJ}}{(n+1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{g}_{Jm} \frac{(m+n)!}{m!} \left( \frac{R_{I0}}{L} \right)^{m+n+1} \quad (2.16)$$

式(2.16)の解を表 2.1 に示す. ここで,  $\hat{h}_{IJ}=\pm 1$ ,  $R_{I0}/L=1/2, 1/3, 1/5$  としている.  $\hat{h}_{IJ}=1$  は同位相で気泡が振動している場合を,  $\hat{h}_{IJ}=-1$  は逆位相で気泡が振動している場合を表している. 計算は式(2.16)において  $n=30$  まで考慮し, それ以上の項は無視している. 表 2.1 には最初の 15 項が示してある. 表 2.1 より係数  $\hat{g}_{In}$  は  $R_{I0}/L$  に大きく依存し,  $\hat{g}_{In}$  の絶対値は  $R_{I0}/L=1/3, 1/5$  の場合には  $n$  が大きくなるにつれて急激に小さくなっているのに対して,  $R_{I0}/L=1/2$ , すなわち 2 個の気泡が接している場合には,  $\hat{g}_{In}$  の収束は遅いことがわかる. また, 同位相の振動の場合の方が相互作用の効果が大きいことが認められる.

以上より  $R_{I0}/L$  が十分小さければ, 式(2.4)は次のように近似される.

$$\varphi(r_I, t) = \frac{q_{I0}(t)}{r_I} + \frac{q_{J0}(t)}{L} \quad (2.17)$$

式(2.17)を式(2.7)に代入し, 式(2.11)を用いると次のような 2 個の球形気泡の運動方程式が得られる.

$$R_{I0} \ddot{R}_{I0} + \frac{3}{2} \dot{R}_{I0}^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ -p_\infty + p_v + p_{I0} \left( \frac{R_{I00}}{R_{I0}} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_{I0}} \right\} + \frac{\dot{q}_{J0}}{L} \quad (2.18)$$

式(2.18)は Shima による気泡の運動方程式<sup>(1)</sup>と一致し,  $L \rightarrow \infty$  とすると単一気泡に関する Rayleigh-Plesset の式<sup>(5)</sup>に帰着する.



表 2.1 式 (2.16) で定義される係数  $\hat{g}_{In}$

$R_{I0}/L$ $\hat{h}_{IJ}$	$\hat{g}_{In}$				
	1	1/2	1/3	1/5	-1
$n=0$	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0
$n=1$	1.7714 × 10 <sup>-1</sup>	-1.0438 × 10 <sup>-1</sup>	5.8310 × 10 <sup>-2</sup>	2.0175 × 10 <sup>-2</sup>	-1.9828 × 10 <sup>-2</sup>
$n=2$	1.5566 × 10 <sup>-1</sup>	-5.9422 × 10 <sup>-2</sup>	2.6686 × 10 <sup>-2</sup>	5.4054 × 10 <sup>-3</sup>	-5.2626 × 10 <sup>-3</sup>
$n=3$	1.2380 × 10 <sup>-1</sup>	-2.6169 × 10 <sup>-2</sup>	1.0343 × 10 <sup>-2</sup>	1.2222 × 10 <sup>-3</sup>	-1.1782 × 10 <sup>-3</sup>
$n=4$	9.9368 × 10 <sup>-2</sup>	-9.1588 × 10 <sup>-3</sup>	3.8165 × 10 <sup>-3</sup>	2.6209 × 10 <sup>-4</sup>	-2.5002 × 10 <sup>-4</sup>
$n=5$	8.1924 × 10 <sup>-2</sup>	-1.7528 × 10 <sup>-3</sup>	1.3810 × 10 <sup>-3</sup>	5.4899 × 10 <sup>-5</sup>	-5.1797 × 10 <sup>-5</sup>
$n=6$	6.9290 × 10 <sup>-2</sup>	9.1366 × 10 <sup>-4</sup>	4.9562 × 10 <sup>-4</sup>	1.1358 × 10 <sup>-5</sup>	-1.0593 × 10 <sup>-5</sup>
$n=7$	5.9808 × 10 <sup>-2</sup>	1.5059 × 10 <sup>-3</sup>	1.7734 × 10 <sup>-4</sup>	2.3327 × 10 <sup>-6</sup>	-2.1491 × 10 <sup>-6</sup>
$n=8$	5.2416 × 10 <sup>-2</sup>	1.3234 × 10 <sup>-3</sup>	6.3447 × 10 <sup>-5</sup>	4.7691 × 10 <sup>-7</sup>	-4.3375 × 10 <sup>-7</sup>
$n=9$	4.6460 × 10 <sup>-2</sup>	9.4185 × 10 <sup>-4</sup>	2.2732 × 10 <sup>-5</sup>	9.7204 × 10 <sup>-8</sup>	-8.7217 × 10 <sup>-8</sup>
$n=10$	4.1529 × 10 <sup>-2</sup>	5.8480 × 10 <sup>-4</sup>	8.1641 × 10 <sup>-6</sup>	1.9771 × 10 <sup>-8</sup>	-1.7489 × 10 <sup>-8</sup>
$n=11$	3.7358 × 10 <sup>-2</sup>	3.1745 × 10 <sup>-4</sup>	2.9410 × 10 <sup>-6</sup>	4.0156 × 10 <sup>-9</sup>	-3.4991 × 10 <sup>-9</sup>
$n=12$	3.3767 × 10 <sup>-2</sup>	1.4115 × 10 <sup>-4</sup>	1.0631 × 10 <sup>-6</sup>	8.1476 × 10 <sup>-10</sup>	-6.9883 × 10 <sup>-10</sup>
$n=13$	3.0632 × 10 <sup>-2</sup>	3.6548 × 10 <sup>-5</sup>	3.8562 × 10 <sup>-7</sup>	1.6520 × 10 <sup>-10</sup>	-1.3936 × 10 <sup>-10</sup>
$n=14$	2.7861 × 10 <sup>-2</sup>	-1.8355 × 10 <sup>-5</sup>	1.4039 × 10 <sup>-7</sup>	3.3478 × 10 <sup>-11</sup>	-2.7751 × 10 <sup>-11</sup>
$n=15$	2.5386 × 10 <sup>-2</sup>	-4.1857 × 10 <sup>-5</sup>	5.1293 × 10 <sup>-8</sup>	6.7823 × 10 <sup>-12</sup>	-5.5197 × 10 <sup>-12</sup>

## 2.4 非圧縮・非粘性流体中での 2 個の非球形気泡の運動方程式

### 2.4.1 座標系と境界条件

前節では気泡間の相互作用により引き起こされる気泡の並進運動および変形は無視してきた。球形気泡の運動の解析は、気泡の相互作用を考える上で最も本質的であるが、マイクロジェット形成などを議論するためには相互作用に起因する気泡の変形機構を明らかにする必要がある。本節では、前節の仮定 (a) のもとで並進運動および変形を考慮した 2 個の気泡の運動方程式を導出する。

さて、気泡が一般に球形から変形する場合には、図 2.1 に示した静止座標系を用いると、気泡形状は Legendre 関数を用いて次のように表現される。

$$S_I = r_I - R_{I0}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} R_{In}(t) P_n(\cos \theta_I) = 0 \quad (2.19)$$

ここで、 $R_{In}(n \geq 1)$  は球形からの変形を表している。しかし、剛体壁近傍での気泡の崩壊過程では、気泡中心が壁方向に引き寄せられながら変形することから、静止座標系を用いた気泡変形の解析はその適用範囲が狭いことが予測される。そのため、図 2.2 に示すように気泡中心とともに移動する移動座標系 ( $b_I$ : 気泡中心の移動量) を用いて解析する。まず最初に、気泡中心の定義と移動座標系を用いた場合の気泡形状の表し方を Hermans<sup>(6)</sup> の解析を用いて考察する。

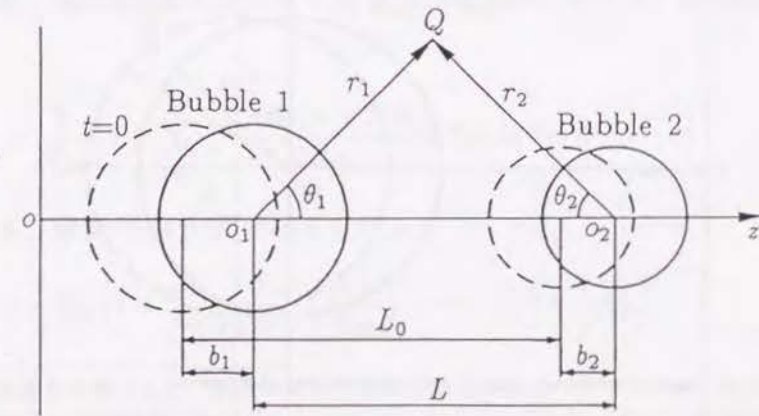


図 2.2 移動座標系



図2.3に示すように、原点 $o_I$ にある半径 $R_{I0}$ の球形気泡 $I$ が $o_I$ から $\Delta z$  ( $\Delta z < R_{I0}$ ) 離れた新しい原点 $o'_I$ に移動する状況を考える。ここで、 $z_I$ は静止座標系 $o$ に対する原点 $o_I$ の座標を表している。このとき、原点 $o_I$ に対する気泡 $I$ の形状は次のように表現される。

$$\begin{aligned} R_{I0} + \Delta R &= \Delta z \cos \theta_I + \left\{ R_{I0}^2 - (\Delta z \sin \theta_I)^2 \right\}^{1/2} \\ &= R_{I0} \left( 1 - \frac{1}{3} \epsilon^2 - \frac{1}{15} \epsilon^4 \right) + \Delta z P_1(\cos \theta_I) \\ &\quad + R_{I0} \left( \frac{1}{3} \epsilon^2 + \frac{2}{21} \epsilon^4 \right) P_2(\cos \theta_I) \\ &\quad - \frac{1}{35} R_{I0} \epsilon^4 P_4(\cos \theta_I) + O(\epsilon^6) R_{I0} \end{aligned} \quad (2.20)$$

ここで、 $\epsilon = \Delta z / R_{I0}$ である。いま、気泡形状が球形からわずかに変形しているものとし

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_{In}(t) P_n(\cos \theta_I) \quad (2.21)$$

を $R_{I0} + \Delta R$ に加え、 $R_{I1} = -\Delta z$ となるように $R_{I1}$ を選ぶと、移動し変形する気泡の形状は以下の式で表現される。

$$R_{I0} \left( 1 - \frac{1}{3} \epsilon^2 - \frac{1}{15} \epsilon^4 \right) + \left\{ R_{I2} + R_{I0} \left( \frac{1}{3} \epsilon^2 + \frac{2}{21} \epsilon^4 \right) \right\} P_2(\cos \theta_I)$$

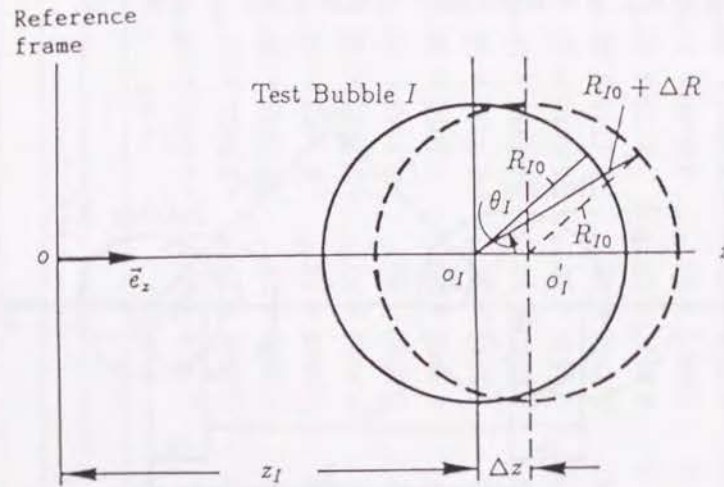


図2.3 球の移動

$$+ R_{I3} P_3(\cos \theta_I) + \left( R_{I4} - \frac{1}{35} R_{I0} \epsilon^4 \right) P_4(\cos \theta_I) + O(\epsilon^6) R_{I0} \quad (2.22)$$

したがって、新しい原点 $o'_I$ が最初の原点 $o_I$ に対して $-R_{I1}$ 動かされたことにより、気泡形状に $R_{I1}$ 成分は含まれなくなることがわかる。言い換えれば、原点の選び方により、 $R_{I1}$ 成分を取り除くことが可能となる。以上より移動座標系における気泡形状は新たに

$$\begin{aligned} S_I &= r_I - R_I = 0, \\ R_I &= R_{I0}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} R_{In}(t) P_n(\cos \theta_I) \end{aligned} \quad (2.23)$$

と定義され、未知変数は $z_I, R_{I0}, R_{I2}, R_{I3}, \dots$ となる\*。

移動座標系を用い、気泡の並進運動および変形を考慮すると、境界条件は次のように変更される。

$$\frac{\partial S_I}{\partial t} - \vec{v}_I \cdot \nabla_I S_I + \nabla_I \varphi \cdot \nabla_I S_I = 0 \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_I \cdot \nabla_I \varphi + \frac{1}{2} |\nabla_I \varphi|^2 \\ + \frac{1}{\rho} \left\{ -p_{\infty} + p_v + p_{I0} \left( \frac{V_{I0}}{V_I} \right)^{\gamma} - 2\sigma H_I \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

ここで、 $\vec{v}_I (= v_I \vec{e}_z, \vec{e}_z: z$ 方向の単位ベクトル)は気泡中心の移動速度ベクトル、 $V_I$ は気泡体積、 $V_{I0}$ は初期気泡体積を表している。平均曲率 $H_I$ は気泡変形を考慮すると

$$H_I = \frac{1}{R_{I0}} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2) R_{In}}{2 R_{I0}} P_n(\cos \theta_I) + \dots \right\} \quad (2.26)$$

と表される。体積 $V_I$ は次式で与えられる。

$$V_I = \frac{4}{3} R_{I0}^3 \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2n+1} \left( \frac{R_{In}}{R_{I0}} \right)^2 + \dots \right\} \approx \frac{4}{3} R_{I0}^3 \quad (2.27)$$

\*気泡の質量を考慮すると、気泡の重心を座標の原点に選ぶべきであるが、気泡の重心とここで示した気泡中心との差は $O((R_{In}/R_{I0})^2) (n \geq 2)$ となり<sup>(6)</sup>、 $O((R_{In}/R_{I0})^2)$ を無視した近似のレベルでは両者は一致する。いずれにしても気泡の並進運動を考慮した場合には $R_{I1}$ と $z_I$ をそれぞれ独立に設定することはできない。



したがって、気泡体積に及ぼす変形の効果は  $(R_{In}/R_{I0})^2$  のオーダーであることがわかる。

## 2.4.2 2個の気泡の運動方程式

移動座標系の場合にも、速度ポテンシャルは式(2.4)で与えられるため、境界条件式(2.24), (2.25)を満足するように、未知関数  $z_I, R_{I0}, R_{I2}, R_{I3}, \dots$  および  $q_{I0}, q_{I1}, q_{I2}, \dots$  を決定することにより、気泡の運動方程式が得られる。

さて、気泡は最初球形を保って静止していることから、 $L$  が大きく、気泡の運動が激しくない場合には、式(2.4)における並進運動 ( $n=1$  成分) および変形 ( $n \geq 2$  成分) に関する項は球形モードに比べて十分小さいものと考えられる。そこで、まず第一次近似として並進運動および変形に関する量の二乗以上の高次の項を無視した方程式を導出する。式(2.4)の相互作用の項を

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} \frac{q_{Jm}}{L^{m+1}} \left(\frac{r_I}{L}\right)^n P_n(\cos \theta_I) \simeq \frac{q_{J0} r_I^n}{L^{n+1}} P_n(\cos \theta_I) \quad (2.28)$$

と近似すると、速度ポテンシャルは

$$\varphi(r_I, \theta_I, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{q_{In}}{r_I^{n+1}} P_n(\cos \theta_I) + \frac{q_{J0} r_I^n}{L^{n+1}} P_n(\cos \theta_I) \right\} \quad (2.29)$$

と表現される。式(2.29)を境界条件式(2.24)に代入し、並進運動および変形に関する量の二乗以上の高次の項を無視し、式(2.10)に示した Legendre 関数の直交性を用いると、以下の式を得る。

$$q_{I0} = -R_{I0}^2 \dot{R}_{I0} \quad (2.30)$$

$$q_{I1} = -\frac{R_{I0}^3 v_{Ir}}{2} \quad (2.31)$$

$$q_{In} = -\frac{R_{I0}^{n+2}}{n+1} \left\{ \dot{R}_{In} + \frac{2\dot{R}_{I0} R_{In}}{R_{I0}} - \frac{n R_{I0}^{n-1} q_{J0}}{L^{n+1}} \right\}, \quad n \geq 2 \quad (2.32)$$

ここで、

$$v_{Ir} = v_I - \frac{q_{J0}}{L^2} \quad (2.33)$$

なお、 $I=2, J=1$  のときには座標系の定義から  $v_I$  を  $-v_I$  に置き換える必要がある。式(2.31)からわかるように、並進運動のポテンシャルは、 $q_{J0}/L^2$  の速度の流体中を  $z$  軸方向に速度  $v_I$  で動いている半径  $R_{I0}$  の球のポテンシャルを表していることがわかる。ただし、流体の速度は球の中心で評価している。このことから、 $n=1$  成分は並進運動に対応していることが確認される。

式(2.29)を式(2.25)に代入し、式(2.30)~(2.32)の関係をを用いると、気泡の運動方程式は次のように表される。

$$R_{I0} \ddot{R}_{I0} + \frac{3}{2} \dot{R}_{I0}^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ -p_{\infty} + p_v + p_{I0} \left( \frac{R_{I00}}{R_{I0}} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_{I0}} \right\} + \frac{\dot{q}_{J0}}{L} \quad (2.34)$$

$$R_{I0} \dot{v}_I + 3 \dot{R}_{I0} v_I = \frac{3}{L^2} \frac{d}{dt} (R_{I0} q_{J0}) \quad (2.35)$$

$$R_{I0} \ddot{R}_{In} + 3 \dot{R}_{I0} \dot{R}_{In} + (n-1) R_{In} \left\{ -\ddot{R}_{I0} + \frac{(n+1)(n+2)\sigma}{R_{I0}^2 \rho} \right\} = \frac{(2n+1)}{L^{n+1}} \frac{d}{dt} (R_{I0}^n q_{J0}), \quad n \geq 2 \quad (2.36)$$

ただし、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{q_{J0}}{L} \right) \simeq \frac{\dot{q}_{J0}}{L} \quad (2.37)$$

と近似した。

さて、式(2.34)~(2.36)において、気泡  $I$  の各モードに及ぼす気泡  $J$  による相互作用の効果をオーダー評価するために以下に示す微小パラメータを定義する。

$$\varepsilon_I = R_{Ic}/L_0 \quad (2.38)$$

ここで、 $R_{Ic}$  は気泡  $I$  周辺での代表長さを表し、 $R_{Ic}$  として気泡の崩壊問題では初期半径  $R_{I00}$ 、成長問題では最大半径  $R_{Imax}$  を用いる<sup>(7)</sup>。 $L_0$  は気泡  $I$  から十分離れ、気泡  $I$  と気泡  $J$  をともに含む領域での代表長さを表し、気泡  $I$  と気泡  $J$  との初期気泡間距離を用いている。気泡周囲の液体圧力が初期状態から  $|\Delta p| (= \text{const.})$  上昇または低下すると仮定すると、気泡  $I$  の代表時間  $t_0$  は次のように定義される。

$$t_0 = R_{Ic} \sqrt{\rho/|\Delta p|} \quad (2.39)$$

$R_{Ic}, L_0, t_0$  を用いて以下に示す無次元量を定義する.

$$\begin{aligned} t^* &= t/t_0, \quad R_{I0}^* = R_{I0}/R_{Ic}, \quad b_I^* = b_I/R_{Ic}, \quad R_{In}^* = R_{In}/R_{Ic}, \\ L^* &= L/L_0, \quad w_{IJ} = R_{Jc}/R_{Ic}, \quad q_{I0}^* = q_{I0}/(R_{Ic}^3/t_0), \quad q_{In}^* = q_{In}/(R_{Ic}^{n+3}/t_0), \\ \varphi^* &= \varphi/(R_{Ic}^2/t_0), \quad p_\infty^* = p_\infty/\Delta p, \quad p_v^* = p_v/\Delta p, \quad p_{Ig0}^* = p_{Ig0}/\Delta p, \\ \sigma^* &= \sigma/(R_{Ic}\Delta p) \end{aligned} \quad (2.40)$$

式(2.38)~(2.40)を用いると(2.30)~(2.36)は次のように無次元化される.

$$q_{I0}^* = -R_{I0}^* R_{I0}^{*'} \quad (2.41)$$

$$q_{I1}^* = -\frac{R_{I0}^{*3}}{2} \left( v_I^* - \frac{w_{IJ}^3 \varepsilon_I^2 q_{J0}^*}{L^{*2}} \right) \quad (2.42)$$

$$q_{In}^* = -\frac{R_{I0}^{*n+2}}{n+1} \left\{ R_{In}^{*'} + \frac{2R_{I0}^{*'} R_{In}^*}{R_{I0}^*} - \frac{n w_{IJ}^3 \varepsilon_I^{n+1} R_{I0}^{*n-1} q_{J0}^*}{L^{*n+1}} \right\}, \quad n \geq 2 \quad (2.43)$$

$$R_{I0}^* R_{I0}^{*''} + \frac{3}{2} R_{I0}^{*'}{}^2 = -p_\infty^* + p_v^* + p_{Ig0}^* R_{I0}^{*-3\gamma} - \frac{2\sigma^*}{R_{I0}^*} + \frac{w_{IJ}^3 \varepsilon_I q_J^{*'}}{L^*} \quad (2.44)$$

$$R_{I0}^* v_I^{*'} + 3R_{I0}^{*'} v_{In}^* = \frac{3w_{IJ}^3 \varepsilon_I^2}{L^{*2}} \frac{d}{dt^*} (R_{I0}^* q_{J0}^*) \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} R_{I0}^* R_{In}^{*''} + 3R_{I0}^{*'} R_{In}^{*'} + (n-1)R_{In}^{*'} \left\{ -R_{I0}^{*''} + \frac{(n+1)(n+2)\sigma^*}{R_{I0}^{*2}} \right\} \\ = \frac{(2n+1)w_{IJ}^3 \varepsilon_I^{n+1}}{L^{*n+1}} \frac{d}{dt^*} (R_{I0}^{*n} q_{J0}^*), \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

ここで,  $''$  は  $t^*$  に関する微分を表す. 式(2.41)~(2.46)を以下に示すように  $\varepsilon_I$  で展開し,

$$q_{In}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_I^k \tilde{q}_{Ink}^*, \quad n \geq 0 \quad (2.47)$$

$$R_{I0}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_I^k \tilde{R}_{I0k}^* \quad (2.48)$$

$$b_I^* = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_I^k \tilde{b}_{Ik}^* \quad (2.49)$$

$$R_{In}^* = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_I^k \tilde{R}_{Ink}^*, \quad n \geq 2 \quad (2.50)$$

気泡は最初, 球形を保って静止しているという初期条件, すなわち

$$\begin{aligned} R_{I0}^*(0) &= 1, \quad b_I^*(0) = 0, \quad R_{In}^*(0) = 0, \\ R_{I0}^{*'}(0) &= 0, \quad v_I^*(0) = 0, \quad R_{In}^{*'}(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

を考慮すると

$$\tilde{b}_{Ik}^* = 0, \quad k = 0, 1 \quad (2.52)$$

$$\tilde{R}_{Ink}^* = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad n \geq 2 \quad (2.53)$$

を得る. したがって,

$$b_I^* \sim O(\varepsilon_I^2) \quad (2.54)$$

$$R_{In}^* \sim O(\varepsilon_I^{n+1}), \quad n \geq 2 \quad (2.55)$$

$$q_{In}^* \sim O(\varepsilon_I^{n+1}), \quad n \geq 1 \quad (2.56)$$

とオーダー評価できる. すなわち, 気泡の並進運動は  $\varepsilon_I^2$  のオーダーで,  $n$  次の変形は  $\varepsilon_I^{n+1}$  のオーダーで引き起こされることになる. 以上のオーダー評価は特異摂動法を用いた Chahine ら<sup>(7)~(10)</sup> のものと一致する. 式(2.34)~(2.36)は気泡の収縮および膨張が緩慢な間は有効であるが, 気泡の収縮が激しくなり気泡半径が小さくなると, 並進運動が気泡変形に大きな影響を及ぼすようになり, 式(2.34)~(2.36)の近似はもはや有効ではなくなることが予想される. そこで以下では第二次近似として, 式(2.34)~(2.36)に並進運動の効果を考慮することを考える.

いま, 気泡  $I$  周辺で  $\varepsilon_I^5$  のオーダーまで正しい速度ポテンシャルを求めると, 速度ポテンシャルは有次元表示で次のように表現される.



$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{q_{In}}{r_I^{n+1}} + \frac{q_{J0} r_I^n}{L^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta_I) \right\} + \sum_{n=0}^1 \frac{(n+1) q_{J1} r_I^n}{L^{n+2}} P_n(\cos \theta_I),$$

$$r_I < L \quad (2.57)$$

ここで、 $n \geq 5$  成分は、 $\varepsilon_I^6$  以上のオーダーの量であるが、高次の変形を表すために残した。式 (2.57) を境界条件式 (2.24) に代入し、並進運動に関する量 ( $n=1$  成分) × 変形に関する量 ( $n \geq 2$  成分) (例えば  $q_{I1} \times R_{In}$  ( $n \geq 2$ )) の項を考慮し、変形に関する量の二乗以上 (例えば  $q_{In} \times R_{In}$ ,  $q_{I1} \times R_{In}^2$  ( $n \geq 2$ )) の高次の項を無視すると、 $\varepsilon_I^5$  のオーダーまで正しい以下の式を得る。

$$q_{I0} = -R_{I0}^2 \dot{R}_{I0} \quad (2.58)$$

$$q_{I1} = -\frac{R_{I0}^3}{2} \left\{ v_I - \sum_{m=0}^1 (m+1) \frac{q_{Jm}}{L^{m+2}} \right\} + \frac{3R_{I0}^2 R_{I2} v_{Ir}}{10} \quad (2.59)$$

$$q_{In} = -\frac{R_{I0}^{n+2}}{n+1} \left\{ \dot{R}_{In} + \frac{2\dot{R}_{I0} R_{In}}{R_{I0}} - \frac{n R_{I0}^{n-1} q_{J0}}{L^{n+1}} + \frac{3n(n+1)}{2(2n-1)} \frac{R_{I(n-1)} v_{Ir}}{R_{I0}} \right\}, \quad n \geq 2 \quad (2.60)$$

ただし、式 (2.60) の  $R_{I(n-1)}$  は、 $n=2$  の場合には  $R_{I1}=0$  である。以上の近似は、並進運動が各モードに及ぼす影響を考慮したことに対応しており、 $q_{I0}$ ,  $q_{I1}$ ,  $q_{In}$  ( $n \leq 3$ ) は、 $\varepsilon_I^5$  のオーダーの項まで考慮されており、 $\varepsilon_I^6$  以上のオーダーの項は無視されている。また、式 (2.60) における  $q_{In}$  ( $n \geq 4$ ) の  $R_{I(n-1)}$  を含む項は、 $\varepsilon_I^{n+2}$  のオーダーの項であるが ( $\varepsilon_I^{n+3}$  以上のオーダーの項は無視されている)、変形量の二乗を含む項を考慮することにより  $\varepsilon_I^{n+2}$  のオーダーの項が現れるため、 $\varepsilon_I^{n+2}$  のオーダーの項は厳密ではない。したがって、全体としては  $\varepsilon_I^5$  の精度となる。式 (2.58) より  $O(\varepsilon_I^5)$  の近似の範囲では、球形モードのポテンシャルに相互作用の効果は直接には現れず、単一気泡のポテンシャルと同じ形であることがわかる。なお、式 (2.58)~(2.60) の導出には、3 項の Legendre 関数に関する以下の関係式を用いた。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_1 P_m P_n d(\cos \theta_I) &= \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}, \quad m = n+1 \\ &= \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}, \quad m = n-1 \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dP_1}{d\theta_I} \frac{dP_m}{d\theta_I} P_n d(\cos \theta_I) &= \frac{2(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}, \quad m = n+1 \\ &= -\frac{2(n-1)n}{(2n-1)(2n+1)}, \quad m = n-1 \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (2.62)$$

式 (2.57)~(2.60) を境界条件式 (2.25) に代入することにより、2 個の気泡の運動方程式が得られる。式 (2.58)~(2.60) の導出と同様の近似を施し<sup>†</sup>、Legendre 関数の関係式 (2.10), (2.61), (2.62) を用いると、以下に示す 2 個の非球形気泡の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} R_{I0} \ddot{R}_{I0} + \frac{3}{2} \dot{R}_{I0}^2 &= \frac{1}{\rho} \left\{ -p_{\infty} + p_v + p_{I0} \left( \frac{R_{I00}}{R_{I0}} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_{I0}} \right\} \\ &+ \frac{d}{dt} \left( \frac{q_J}{L} \right) + G_{I0} \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho V_{Ib} v_{Ir} \right) - \rho V_{Ib} \frac{d}{dt} \left( \frac{q_{J0}}{L^2} \right) + G_{I1} = 0 \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} R_{I0} \ddot{R}_{In} + 3\dot{R}_{I0} \dot{R}_{In} + (n-1) R_{In} \left\{ -\ddot{R}_{I0} + \frac{(n+1)(n+2)\sigma}{R_{I0}^2 \rho} \right\} \\ = \frac{(2n+1)}{L^{n+1}} \frac{d}{dt} (R_{I0}^n q_{J0}) + G_{In}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (2.65)$$

ここで、

$$G_{I0} = -\frac{R_{J0}^3 \dot{q}_{I0}}{L^4} + \frac{3v_{Ir}^2}{4} - \frac{v_I^2}{2} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} G_{I1} &= -\frac{2\pi\rho R_{I0}^2}{3} \left\{ v_{Ir} \left( \frac{9}{5} \dot{R}_{I2} - \frac{9\dot{R}_{I0} R_{I2}}{5R_{I0}} - \frac{6R_{I0} q_{J0}}{L^3} \right) - \frac{6R_{I0} R_{J0}^3 \dot{q}_{I0}}{L^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{18R_{I2} \dot{q}_{J0}}{5L^2} - \frac{3R_{J0}^3 \dot{R}_{I0} v_{Jr}}{L^3} \right\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$G_{I2} = -\frac{9v_{Ir}^2}{4} \quad (2.68)$$

$$G_{In} = -\frac{3(n+1)v_{Ir}}{2} \left\{ \dot{R}_{I(n-1)} + \frac{n-2}{2n-1} \frac{\dot{R}_{I0} R_{I(n-1)}}{R_{I0}} - \frac{(n-1) R_{I0}^{n-2} q_{J0}}{L^n} \right\},$$

<sup>†</sup>並進運動に関する量の二乗×変形に関する量、例えば  $q_{I1}^2 \times R_{In}$  ( $n \geq 2$ ) は考慮しない。



$$n \geq 3 \quad (2.69)$$

$$V_{Ib} = \frac{4\pi R_{I0}^3}{3} \quad (2.70)$$

ただし,

$$\dot{q}_{J1} = -\frac{R_{J0}^3 \dot{q}_{J0}}{L^2} \quad (2.71)$$

と近似した. ここで,  $G_{I0}$  は  $\varepsilon_I^4$ ,  $G_{I1}$  は  $\varepsilon_{IJ}^5$ ,  $G_{In}$  ( $n \geq 2$ ) は  $\varepsilon_{IJ}^{n+2}$  のオーダーの項で, 並進運動がそれぞれのモードに及ぼす効果を表している. これらの式は, (2.58)~(2.60)と同様に, 全体で  $\varepsilon_{IJ}^5$  の精度である ( $n \geq 4$  の変形モードの運動方程式は  $O(\varepsilon_I^{n+2})$  の誤差を含む). 式 (2.63) の  $\dot{L}/L^2$  および式 (2.64) の  $\dot{L}/L^3$  を含む項と  $G_{In}$  ( $n=0,1,2, \dots$ ) を無視すると, 式 (2.63)~(2.65) は第一次近似の運動方程式となり, さらに,  $L \rightarrow 0$  とすると単一気泡の運動方程式に帰着する<sup>(5),(11)</sup>.

以上の運動方程式において  $J=I$  とすると, 同じ大きさの2個の非球形気泡の運動方程式, すなわち平面剛体壁近傍での単一気泡の運動方程式が得られる.  $O(\varepsilon_I^6)$  以上の項をすべて無視すると, それらは以下のように表される.

$$R_0 \ddot{R}_0 + \frac{3}{2} \dot{R}_0^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ -p_\infty + p_v + p_{g0} \left( \frac{R_{00}}{R_0} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_0} \right\} + \frac{\dot{q}_0}{L_0} \left( 1 + \frac{2b}{L_0} - \frac{R_0^3}{L_0^3} \right) + \frac{v q_0}{L_0^2} + \frac{v_r^2}{4} + \frac{q_0^2}{2L_0^4} \quad (2.72)$$

$$R_0 \dot{v} + 3 \dot{R}_0 v = \left( \frac{3}{L_0^2} + \frac{12b}{L_0^3} \right) \frac{d}{dt} (R_0 q_0) + v_r \left( \frac{9 \dot{R}_2}{5} - \frac{9 \dot{R}_0 R_2}{5 R_0} - \frac{3 R_0 q_0}{L_0^3} \right) - \frac{6 R_0^4 \dot{q}_0}{L_0^5} + \frac{18 R_2 \dot{q}_0}{5 L_0^2} + \frac{12 R_0 v q_0}{L_0^3} \quad (2.73)$$

$$R_0 \ddot{R}_2 + 3 \dot{R}_0 \dot{R}_2 + R_2 \left( -\ddot{R}_0 + \frac{12\sigma}{R_0^2 \rho} \right) = \frac{5}{L_0^3} \frac{d}{dt} (R_0^2 q_0) - \frac{9 v_r^2}{4} \quad (2.74)$$

$$R_0 \ddot{R}_3 + 3 \dot{R}_0 \dot{R}_3 + 2 R_3 \left( -\ddot{R}_0 + \frac{20\sigma}{R_0^2 \rho} \right)$$

$$= \frac{7}{L_0^4} \frac{d}{dt} (R_0^3 q_0) - v_r \left( 6 \dot{R}_2 + \frac{6 \dot{R}_0 R_2}{5 R_0^3} - \frac{12 R_0 q_0}{L_0^3} \right) \quad (2.75)$$

$$R_0 \ddot{R}_4 + 3 \dot{R}_0 \dot{R}_4 + 3 R_4 \left( -\ddot{R}_0 + \frac{30\sigma}{R_0^2 \rho} \right) = \frac{9}{L_0^5} \frac{d}{dt} (R_0^4 q_0) \quad (2.76)$$

ここで

$$v_r = v - \frac{q_0}{L_0^2} \quad (2.77)$$

ただし, 気泡を表す添字  $I$  は省略されている.

式 (2.72)~(2.76) を, 式 (2.44)~(2.46) と同様に無次元化し, 式 (2.47)~(2.50) を用いて  $\varepsilon$  (添字  $I$  は省略) について整理すると特殊な場合として Chahine ら<sup>(10)</sup> により得られた摂動法による平面剛体壁近傍での気泡の運動方程式が得られる. ただし, Chahine らの結果には気泡変形に関して  $n=1$  成分  $R_{I1}$  が含まれているため方程式の数が一つ足りない. このため, 彼らは境界条件式 (2.24), (2.25) を満足しない並進運動の方程式を用いて気泡の運動を解析している. さらに彼らの結果には  $O(\varepsilon^3)$  以降の近似に並進運動の修正が行われていない. このような扱いは, 流体力学的に一貫しておらず, そのため,  $O(\varepsilon^2)$  以降では本結果と一致しない. また, 彼らのように  $\varepsilon$  に関して方程式を分離してしまうと,  $\varepsilon^0$  次モードは単一球形気泡の運動方程式 (Rayleigh-Plesset の式<sup>(5)</sup>) になる. したがって, 蒸気泡の場合や気泡内の非凝縮性の初期気体圧力  $p_{g0}$  が小さい場合の気泡の崩壊問題では, 分離された  $\tilde{q}_{00}^*$  が式 (2.41) の  $q_0^*$  と比べて早い時期に大きくなり, それに伴い,  $\tilde{R}_{0k}^*$  ( $k=1,2,\dots$ ) も大きくなって, 気泡変形が顕著に現れる以前に摂動法の仮定が崩れてしまう<sup>†</sup>. そのため, 方程式の適用範囲が非常に限られたものとなり好ましくない.

液体の圧力分布は移動座標系  $I$  の変数を独立変数とする非定常 Bernoulli の式を用いて以下のように決定される.

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v}_I \cdot \nabla_I \varphi - \frac{1}{2} |\nabla_I \varphi|^2 \quad (2.78)$$

式 (2.78) を用いると, 平面剛体壁近傍での気泡の崩壊問題において, 気泡周辺 (気泡の初期半径のオーダー) で,  $O(\varepsilon^5)$  まで正しい液体圧力  $p_{in}$  は次のように表現される.

<sup>†</sup>例えば, 蒸気泡の崩壊問題では  $\varepsilon$  がいかなる値でも Rayleigh<sup>(12)</sup> の無次元崩壊時間 0.9147 において  $\tilde{q}_{00}^*$  は無限大になる.  $\varepsilon$  に関して方程式を分離しなければ第4章に示されるように 0.9147 以降の気泡の挙動を扱うことが可能である.



$$\begin{aligned}
\frac{p_{in}}{\rho} = & \frac{p_{\infty}}{\rho} - \sum_{n=0}^4 \left( \frac{\dot{q}_n}{r_1^{n+1}} + \frac{\dot{q}_0 r_1^n}{L_0^{n+1}} \right) P_n + \frac{1}{L_0^2} \left( 1 + \frac{2r_1 P_1}{L_0} \right) (2b\dot{q}_0 + 2vq_0 + \dot{q}_1) \\
& + v \cos \theta_1 \left\{ - \sum_{n=0}^2 \frac{(n+1)q_n}{r_1^n} P_n + \frac{q_0}{L_0^2} \left( P_1 + \frac{2r_1 P_2}{L_0} \right) \right\} \\
& - v \sin \theta_1 \left\{ \left( \frac{q_1}{r_1^3} + \frac{q_0}{L_0^2} \right) \frac{dP_1}{d\theta_1} + \left( \frac{q_2}{r_1^4} + \frac{q_0 r_1}{L_0^3} \right) \frac{dP_2}{d\theta_1} \right\} \\
& - \frac{q_0^2}{2r_1^4} - q_0 \left[ \sum_{n=1}^4 \left\{ \frac{(n+1)q_n}{r_1^{n+4}} - \frac{nq_0 r_1^{n-3}}{L_0^{n+1}} \right\} P_n \right] + \frac{2q_0}{r_1^2 L_0^3} (2q_0 b + q_1) P_1 \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{2q_1}{r_1^3} - \frac{q_0}{L_0^2} \right)^2 P_1^2 - \left( \frac{2q_1}{r_1^3} - \frac{q_0}{L_0^2} \right) \left( \frac{3q_2}{r_1^4} - \frac{2q_0 r_1}{L_0^3} \right) P_1 P_2 \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{q_1}{r_1^3} + \frac{q_0}{L_0^2} \right)^2 \left( \frac{dP_1}{d\theta_1} \right)^2 - \left( \frac{q_1}{r_1^3} + \frac{q_0}{L_0^2} \right) \left( \frac{q_2}{r_1^4} + \frac{q_0 r_1}{L_0^3} \right) \left( \frac{dP_1}{d\theta_1} \right) \left( \frac{dP_2}{d\theta_1} \right) \quad (2.79)
\end{aligned}$$

ただし、式(2.79)において、 $P_n$ は座標系1の変数 $\theta_1$ で定義したLegendre関数を表しており、気泡を表す添字 $I$ は省略されている。また、気泡から十分離れた位置での液体圧力 $p_{out}$ は $O(\varepsilon^6)$ の範囲で次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{p_{out}}{\rho} = & \frac{p_{\infty}}{\rho} - \sum_{n=0}^2 \dot{q}_n \left\{ \frac{P_n(\cos \theta_1)}{r_1^{n+1}} + \frac{P_n(\cos \theta_2)}{r_2^{n+1}} \right\} - vq_0 \left( \frac{\cos \theta_1}{r_1^2} + \frac{\cos \theta_2}{r_2^2} \right) \\
& - q_0^2 \left\{ \frac{1}{2r_1^4} + \frac{1}{2r_2^4} - \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{r_1^2 r_2^2} \right\} \quad (2.80)
\end{aligned}$$

## 2.5 粘性流体中での2個の非球形気泡の運動方程式

前節まではポテンシャル流体中での気泡の運動に限定し、気泡の運動および気泡間の相互作用に及ぼす液体の粘性の効果は無視していた。通常、水中での比較的小さい気泡半径の大きな気泡の崩壊運動を取り扱う上では、液体の粘性の効果は無視し得るものと考えられるが、気泡半径が小さな場合や生体中でのキャビテーションのように水と比べて粘性の大きなキャビテーション現象を扱う場合には気泡運動に粘性の効果を検討することが重要となろう。

本節ではポテンシャル理論による結果を拡張し、粘性を考慮した2個の気泡の運動方程式を導出する。

### 2.5.1 基礎方程式

用いる仮定は粘性を考慮することを出いて2.4節と同様とする。空間に固定した座標系 $o$ に対する任意の点 $Q$ での流体の速度ベクトル $\vec{u}$ を、気泡 $I(I=1,2)$ の中心とともに $z$ 方向に移動する座標系 $o_I$ の独立変数 $r_I, \theta_I, t$ を用いて表現すると、連続および運動量の式は

$$\nabla_I \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - (\vec{u}_I \cdot \nabla_I) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla_I) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla_I p + \nu \Delta_I \vec{u} \quad (2.82)$$

となる。ここで $\nu$ は動粘性係数、 $\Delta_I$ は座標系 $I$ に関するLaplacianを表している。

さて、気泡のように自由表面を境界に持つ流れでは、境界層を通しての速度変化が小さいため<sup>(13)</sup>、粘性による流れ場の変化は境界層の外側のポテンシャルによる流れ場に比べて十分小さいものと考えられる。この場合、速度ベクトル $\vec{u}$ をポテンシャル流れの速度ベクトル $\vec{u}_p (= \nabla_I \varphi)$ と粘性によるポテンシャル流れからの変化分 $\vec{u}_v$ との和に分解し、式(2.82)を線形化することが可能となる。同様に圧力 $p$ も、ポテンシャル流れによる圧力 $p_p$ と粘性による圧力変化 $p_v$ とに分解する。さらに、気泡 $I$ 周辺の流れ場および圧力場について考えると、相手の気泡(気泡 $J$ :  $I=1$ のとき $J=2$ ,  $I=2$ のとき $J=1$ )の粘性による速度変化 $\vec{u}_{Jv}$ および圧力変化 $p_{Jv}$ は気泡表面から十分はなれた場所(気泡表面に発達した粘性境界層の外側)では消



滅するものと考えられるので、それぞれの気泡周辺の流れ場および圧力場に相手の気泡の境界層が与える影響を無視し、速度ベクトル  $\vec{u}$  および圧力  $p$  を

$$\vec{u} \approx \vec{u}_p + \vec{u}_{I\nu}, \quad p \approx p_p + p_{I\nu} \quad (2.83)$$

と近似する。  $|\vec{u}_{I\nu}| \ll |\vec{u}_p|, |p_{I\nu}| \ll |p_p|$  として、式(2.81),(2.82)を線形化すると以下の式を得る。

$$\nabla_I \cdot \vec{u}_p = 0 \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_I \cdot \nabla_I \varphi + \frac{1}{2} |\nabla_I \varphi|^2 = -\frac{p_p - p_\infty}{\rho} \quad (2.85)$$

$$\nabla_I \cdot \vec{u}_{I\nu} = 0 \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_{I\nu}}{\partial t} + \nabla_I (\vec{u}_{pr} \cdot \vec{u}_{I\nu} + \frac{p_{I\nu}}{\rho}) = \vec{u}_{pr} \times \vec{\omega}_I - \nu \nabla_I \times \vec{\omega}_I \quad (2.87)$$

ここで、  $\vec{u}_{pr} = \vec{u}_p - \vec{v}_I$ ,  $\vec{\omega}_I = \nabla_I \times \vec{u}_{I\nu}$  であり、式(2.85)の導出には、境界条件

$$\lim_{r_I \rightarrow \infty} \vec{u} = 0 \quad (2.88)$$

を用いている。さらに、式(2.87)を変形すると渦度  $\vec{\omega}_I$  に関する以下の式が得られる。

$$\frac{\partial \vec{\omega}_I}{\partial t} + \nabla_I \times (\vec{\omega}_I \times \vec{u}_{pr}) + \nu \nabla_I \times (\nabla_I \times \vec{\omega}_I) = 0 \quad (2.89)$$

気泡形状を座標系  $I$  で定義される Legendre 関数  $P_n(\cos \theta_I)$  を用いて、式(2.23)のように表現すると  $S_I = 0$  上での境界条件は次のように与えられる。

$$\frac{\partial S_I}{\partial t} - \vec{v}_I \cdot \nabla_I S_I + \vec{u} \cdot \nabla_I S_I = 0 \quad (2.90)$$

式(2.90)は式(2.83)より、次のように線形化される。

$$\frac{\partial S_I}{\partial t} + \vec{u}_{pr} \cdot \nabla_I S_I = 0 \quad (2.91)$$

$$\vec{u}_{I\nu} \cdot \nabla_I S_I = 0 \quad (2.92)$$

また、気泡表面での接線方向および法線方向の応力の釣り合い条件において、  $(R_{In}/R_{I0})^2 (n \geq 2)$  のオーダーを無視し、さらに、気液界面での気体の接線方向の応力を液体の応力に比べて無視すると、以下の式を得る。

$$\vec{n}_I \times [T \vec{n}_I] = 0 \quad (2.93)$$

$$\vec{n}_I \cdot [T \vec{n}_I] + p_v + p_{I0} \left( \frac{R_{I00}}{R_{I0}} \right)^{3\gamma} - 2\sigma H_I = 0 \quad (2.94)$$

ここで、  $\vec{n}_I$  は気泡表面での気泡に対して内向きの単位法線ベクトル、  $T$  は気泡表面での液体の応力テンソルを表している。

## 2.5.2 粘性によるポテンシャル場からの変化

式(2.84)および境界条件式(2.91)を満足するポテンシャル理論の解は、既に2.4節において導出されているため、ここでは2.4節の結果を用いて、粘性によるポテンシャル場からの変化量  $\vec{u}_{I\nu}, p_{I\nu}$  を決定する。ただし、「粘性による変化量×気泡の移動および球形からの変形量」は「粘性による変化量×気泡の半径方向の変化量」に比べて十分小さいものとして、これを考慮しない。このことは、ポテンシャルの解としては式(2.30)~(2.32)の第一次近似を用いればよいことに対応している。

単一気泡の変形に関して、粘性の影響を取り扱った Prosperetti の論文<sup>(14)</sup>に従って、式(2.86)を満足する解を次のように与える。

$$\vec{u}_{I\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_{In}(r_I, t) P_n(\cos \theta_I) \vec{e}_{Ir} - \nabla_I \{ \Psi_{In}(r_I, t) P_n(\cos \theta_I) \} \right] \quad (2.95)$$

ここで、  $\vec{e}_{Ir}$  は  $r_I$  方向の単位ベクトルである。式(2.95)の回転をとると渦度  $\vec{\omega}_I$  は

$$\vec{\omega}_I = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{T_{In}}{r_I} \frac{dP_n}{d\theta_I} \vec{e}_{I\psi} \right) \quad (2.96)$$

と表現される。ここで、  $\vec{e}_{I\psi}$  は図2.2における紙面に垂直方向の単位ベクトルを表している。一般に、ソレノイダルなベクトル場はポロイダル場とトロイダル場の和に分解されるが<sup>(14),(15)</sup>、本問題が軸対称な場合に限られているため、式(2.96)のソレノイダル場  $\vec{\omega}_I$  はトロイダル場のみにより表現される。式(2.95)を式(2.86)に代入し、式(2.88),(2.92)の境界条件を用いて解くと、  $T_{In}$  を未知関数として  $\Psi_{In}$  が次のように決定される。



$$\Psi_{In} = \left[ \frac{n R_{I0}^{2n+1}}{n+1} \alpha_{In} + \frac{n}{2n+1} \int_{R_{I0}}^{r_I} s^{n+1} T_{In}(s, t) ds \right] r_I^{-(n+1)} + \left[ \alpha_{In} + \frac{n+1}{2n+1} \int_{R_{I0}}^{r_I} \frac{T_{In}(s, t)}{s^n} ds \right] r_I^n \quad (2.97)$$

ここで,

$$\alpha_{In} = -\frac{n+1}{2n+1} \int_{R_{I0}}^{\infty} \frac{T_{In}(s, t)}{s^n} ds \quad (2.98)$$

未知関数  $T_{In}$  は, 式 (2.89) より次の偏微分方程式を満たす.

$$\nu \frac{\partial^2 T_{In}}{\partial r_I^2} - \frac{\partial T_{In}}{\partial t} - \frac{\nu n(n+1) T_{In}}{r_I^2} - \frac{\partial}{\partial r_I} \left( \frac{R_{I0}^2 \dot{R}_{I0}}{r_I^2} T_{In} \right) = 0 \quad (2.99)$$

ポテンシャル理論により得られた速度ポテンシャル  $\varphi$  および式 (2.95) を式 (2.93) に代入し, 並進運動および変形に関する量の二乗以上の高次の項を無視すると

$$\frac{T_{In}(R_{I0}, t)}{R_{I0}} = -\frac{2(n+2)q_{In}}{R_{I0}^{n+3}} + \frac{6R_{In}q_{I0}}{R_{I0}^4} + \frac{2(2n+1)}{n+1} R_{I0}^{n-2} \alpha_{In} + \frac{2(n-1)R_{I0}^{n-2} q_{J0}}{L^{n+1}} \quad (2.100)$$

を得る. 式 (2.100) は粘性流体の場合にのみ適用される式であり, 式 (2.99) の気泡表面での境界条件となっている. ただし, 気泡の収縮が激しくなり, 並進移動速度が速くなると, 式 (2.100) に並進運動が変形に及ぼす影響を考慮する必要があるものと考えられる.

圧力変化  $p_{I\nu}$  は, 式 (2.95)~(2.99) を式 (2.87) に代入することにより, 次式のよう表現される.

$$\frac{p_{I\nu}}{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \Psi_{In}}{\partial t} + \frac{R_{I0}^2 \dot{R}_{I0}}{r_I^2} T_{In} - \nu \left( \frac{\partial T_{In}}{\partial r_I} \right) \right\} P_n - \frac{R_{I0}^2 \dot{R}_{I0}}{r_I^2} (\vec{e}_{Ir} \cdot \vec{u}_{I\nu}) \quad (2.101)$$

式 (2.101) を式 (2.99) を用いてさらに変形すると,  $r_I = R_{I0}$  で  $p_{I\nu}$  は

$$\frac{p_{I\nu}}{\rho} \Big|_{r_I=R_{I0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n\nu T_n(R_{I0}, t)}{R_{I0}} + \frac{n\dot{R}_{I0}}{R_{I0}} \int_{R_{I0}}^{\infty} \left\{ \left( \frac{R_{I0}}{r_I} \right)^3 - 1 \right\} \left( \frac{R_{I0}}{r_I} \right)^n T_{In} dr_I \right] \quad (2.102)$$

となる.

### 2.5.3 粘性を考慮した2個の気泡の運動方程式

ポテンシャル理論の式 (2.85) により得られる圧力  $p_p$  と速度ポテンシャル  $\varphi$  ならびに式 (2.95), (2.102) を式 (2.94) の法線方向の応力の釣り合いの式に代入することにより, 2 個の非球形気泡の運動方程式が得られる. 式 (2.57) の第二次近似の解を用いて圧力  $p_p$  の計算を行い, さらに, Legendre 関数の直交性を用いると, 気泡  $I$  の半径方向の運動, 並進運動, 変形に関して以下の式を得る.

$$R_{I0} \ddot{R}_{I0} + \frac{3}{2} \dot{R}_{I0}^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ -p_{\infty} + p_v + p_{I0} \left( \frac{R_{I00}}{R_{I0}} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_{I0}} \right\} - \frac{4\nu \dot{R}_{I0}}{R_{I0}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{q_{J0}}{L} \right) + G_{I0} \quad (2.103)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho V_{Ib} v_{Ir} \right) - \rho V_{Ib} \frac{d}{dt} \left( \frac{q_{J0}}{L^2} \right) + \frac{C_D}{2} \pi R_{I0}^2 \rho v_{Ir} |v_{Ir}| - 8\pi \mu R_{I0} \int_{R_{I0}}^{\infty} \frac{T_{I1}}{r_I} dr_I + \frac{4\pi \rho R_{I0} \dot{R}_{I0}}{3} \int_{R_{I0}}^{\infty} \left\{ \left( \frac{R_{I0}}{r_I} \right)^3 - 1 \right\} \left( \frac{R_{I0}}{r_I} \right) T_{I1} dr_I + G_{I1} = 0 \quad (2.104)$$

$$R_{I0} \ddot{R}_{In} + \dot{R}_{In} \left\{ 3\dot{R}_{I0} + \frac{2\nu(n+2)(2n+1)}{R_{I0}} \right\} + (n-1)R_{In} \left\{ -\ddot{R}_{I0} + \frac{(n+1)(n+2)\sigma}{R_{I0}^2 \rho} + \frac{2\nu(n+2)\dot{R}_{I0}}{R_{I0}^2} \right\} = \frac{(2n+1)}{L^{n+1}} \frac{d}{dt} (R_{I0}^n q_{J0}) + 2\nu n(n+2)(2n+1) \frac{R_{I0}^{n-2} q_{J0}}{L^{n+1}} + 2\nu n(n+1)(n+2) R_{I0}^{n-2} \int_{R_{I0}}^{\infty} \frac{T_{In}}{r_I^n} dr_I - \frac{n(n+1)\dot{R}_{I0}}{R_{I0}} \int_{R_{I0}}^{\infty} \left\{ \left( \frac{R_{I0}}{r_I} \right)^3 - 1 \right\} \left( \frac{R_{I0}}{r_I} \right)^n T_{In} dr_I + G_{In}, \quad n \geq 2 \quad (2.105)$$

ここで,

$$C_D = \frac{48}{\mathcal{R}_e}, \quad \mathcal{R}_e = \frac{2R_{I0}|v_{Ir}|}{\nu} \quad (2.106)$$



式(2.103)~(2.105)において  $G_{In} = 0, L \rightarrow \infty$  とすると、粘性を考慮した単一気泡の運動方程式が得られ<sup>(14)</sup>、粘性の影響を無視すると、2.4節で得られたポテンシャル理論による解が得られる。

並進運動の式(2.104)を吟味してみると、 $v_{Ir}$ は式(2.33)で定義される気泡中心の相対並進移動速度を表しており、左辺第1項は気泡の並進運動に起因する付加質量の加速による力を、第2項は相手の気泡が気泡中心に誘起する圧力勾配による力、第3項は粘性による抗力を表していることがわかる。抗力係数  $C_D = 48/R_e$  は Batchelor<sup>(13)</sup>の単一球形気泡の結果と一致している。

式(2.104),(2.105)における  $T_{In}$  の積分を含む項は、気泡表面に発達する境界層の厚さのオーダーの量で、気泡の半径方向の運動が小さいときには、十分小さいものと考えられる。この積分を含む項を無視すると、Prosperettiら<sup>(16)</sup>および Ceschiaら<sup>(17)</sup>により得られた結果と一致する。 $T_{In}$ の積分を含む項を考慮する場合には、式(2.103)~(2.105)だけでは方程式は閉じず、式(2.99)で定義される  $T_{In}$  に関する偏微分方程式を式(2.100)の境界条件のもとで同時に解く必要がある。

## 2.6 Lagrange の運動方程式を用いた2個の非球形気泡の解析

前節では液体の粘性による流れ場および圧力場のポテンシャル場からの変化が小さいものとして、気泡表面での応力の釣り合いから、気泡周囲の境界層を考慮した2個の非球形気泡の運動方程式を導出した。得られた式(2.104),(2.105)において、境界層に関する  $T_{In}$  の積分の項を無視すると、方程式は簡単な常微分方程式系に帰着する。本節では境界層の影響を無視した気泡の運動方程式を粘性散逸を考慮した Lagrange の運動方程式を用いて導出する。

式(2.23)の気泡  $I$  ( $I=1,2$ ) 表面を記述する関数  $R_{I0}, R_{In} (n=2,3,\dots)$  および気泡中心の移動量  $b_I$  とそれらの一階時間微分  $\dot{R}_{I0}, \dot{R}_{In} (n=2,3,\dots), v_I$  を、場を記述する一般化座標と考え、Lagrangian  $\mathcal{L}$  をそれらの関数で表現する。

液体の持つ運動エネルギー  $\mathcal{K}$  は、 $A_I$  を気泡  $I$  の表面積とすると、Green の定理より

$$\mathcal{K} = \sum_{I=1}^2 \mathcal{K}_I, \quad \mathcal{K}_I = \frac{\rho}{2} \int \int_{A_I} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_I} dA_I \quad (2.107)$$

と表される。ここで、 $\partial/\partial n_I$  は法線ベクトル  $\vec{n}_I$  方向の微分を表し、 $\vec{n}_I$  は気泡の内側を向いている。

いま、気泡  $I$  内の気体圧力を  $p_{Ib}$  とするとき、気泡  $I$  の表面積が  $\delta A_I$ 、体積が  $\delta V_I$  変化したと仮定すると、気体は  $p_{Ib} \delta V_I$ 、液体は無限遠方で  $p_\infty \delta V_I$  の仕事をし、気泡表面に蓄えられるエネルギーが  $\sigma \delta A_I$  だけ変化する。以上の変化に対応するポテンシャルエネルギーを  $\mathcal{U}$  とすると、 $\mathcal{U}$  は

$$\mathcal{U} = \sum_{I=1}^2 \mathcal{U}_I, \quad \mathcal{U}_I = - \int (p_{Ib} - p_\infty) dV_I + \sigma \int \int_{A_I} dA_I + \text{const.} \quad (2.108)$$

と表現できる。さらに、液体の単位時間あたりの全エネルギー消散率を  $2\mathcal{F}$  とし、 $\mu$  を粘性係数とすると、 $\mathcal{F}$  は次のように表現される。

$$\mathcal{F} = \sum_{I=1}^2 \mathcal{F}_I, \quad \mathcal{F}_I = \frac{\mu}{2} \int \int_{A_I} \frac{\partial u_I^2}{\partial n_I} dA_I \quad (2.109)$$



ここで,  $u_I^2 = |\nabla_I \varphi|^2$  である.

式 (2.107), (2.108) を用いて Lagrangian を  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$  と定義すると, Lagrange の運動方程式は次のように表現できる<sup>(17)(18)</sup>.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}_{In}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{In}} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{R}_{In}}, \quad n = 0, 2, 3, \dots \quad (2.110)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}_I} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_I} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{v}_I} \quad (2.111)$$

Lagrange の運動方程式には一般化座標に関する微分が含まれているため, 式 (2.63)~(2.65) に示したオーダーまで正しい気泡の運動方程式を得るには, あらかじめ, 式 (2.57)~(2.60) で与えられる速度ポテンシャル  $\varphi$  を求める際にさらに高次の微小量まで考慮する必要がある.  $q_{In}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) は次式で与えられる.

$$q_{I0} = -R_{I0}^2 \dot{R}_{I0} - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\dot{R}_{I0} R_{In}^2}{2n+1} + \frac{2 R_{I0} R_{In} \dot{R}_{In}}{2n+1} \right\} \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} q_{I1} = & -\frac{R_{I0}^3}{2} \left\{ v_I - \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \frac{q_{Jm}}{L^{m+2}} \right\} + \frac{3 R_{I0}^2 R_{I2} v_{Ir}}{10} \\ & - \sum_{n=3}^{\infty} \left\{ \frac{3(n+1) R_{I0} \dot{R}_{I0} R_{I(n-1)} R_{In}}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{9n R_{I0}^2 R_{I(n-1)} \dot{R}_{In}}{2(2n-1)(2n+1)} \right. \\ & \left. - \frac{3n R_{I(n-1)} R_{I0}^{n+1} q_{J0}}{2(2n-1) L^{n+1}} \right\} \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{3(n+2) R_{I0}^2 R_{I(n+1)} \dot{R}_{In}}{2(2n+1)(2n+3)} + \frac{3n R_{I(n+1)} R_{I0}^{n+1} q_{J0}}{2(2n+3) L^{n+1}} \right\} \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} q_{In} = & -\frac{R_{I0}^{n+2}}{n+1} \left\{ \dot{R}_{In} + \frac{2 \dot{R}_{I0} R_{In}}{R_{I0}} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n)! R_{I0}^{n-1} q_{Jm}}{m!(n-1)! L^{m+n+1}} \right. \\ & \left. + \frac{3n(n+1) R_{I(n-1)} v_{Ir}}{2(2n-1) R_{I0}} - \frac{3n(n+1) R_{I(n+1)} v_{Ir}}{2(2n+3) R_{I0}} \right\}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (2.114)$$

詳細は省略するが式 (2.112)~(2.114) を式 (2.4) に代入して  $\varphi$  を一般化座標の関数で表現し,  $\varphi$  を用いて  $\mathcal{L}$  および  $\mathcal{F}$  を計算し, それらを式 (2.110), (2.111) に代入

すると, 式 (2.103)~(2.105) の運動方程式において境界層に関する  $T_{In}$  の積分の項を無視した場合の2個の気泡の運動方程式が得られる.

以上の議論より  $T_{In}$  の積分の項を無視することは, 境界層内の速度勾配がその外側のポテンシャル流れの領域での速度勾配に比べて大きなオーダーとなることはないとして境界層を無視し, 単位時間当りの消散エネルギーをポテンシャル理論で与えられる速度勾配を用いて評価することに対応していることがわかる. そのため,  $T_{In}$  の積分を無視することにより, 気泡壁での速度勾配は過剰に見積られていたものと考えられる.

## 2.7 圧縮性流体中での2個の球形気泡の運動方程式

前節までの議論では液体の圧縮性は無視していた。単一球形気泡の崩壊過程に関する解析によると、気泡壁速度が速くなり液中音速で定義される Mach 数が約 0.2 を超えると、液体の圧縮性の影響が現れる<sup>(19)</sup>。また、音場中での気泡の非線形振動問題のように比較的長い期間にわたって気泡の運動を解析する場合には圧縮性による気泡振動の減衰効果を考えることが必要となる。そこで本節では、並進運動および変形を無視し、音波近似に基づいて液体の圧縮性を考慮した2個の球形気泡の運動方程式を導出する。

### 2.7.1 基礎方程式

2.4節までと同様に周囲液体は渦なしとし、速度ポテンシャル $\varphi$ を定義する。液体のバロトロピー性を仮定すると、連続および運動量の式は次のように表現される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla^2 \varphi + (\nabla \rho) \cdot (\nabla \varphi) = 0 \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + h = 0 \quad (2.116)$$

ここで、 $h$  はエンタルピーに相当しており、次のように定義される。

$$h = \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} \quad (2.117)$$

$\rho$  と  $p$  の関係は Tait の状態方程式<sup>(20)</sup>

$$\frac{p+B}{p_\infty+B} = \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\kappa \quad (2.118)$$

により与えられる。ここで、 $B$  と  $\kappa$  は定数である。式(2.118)を用いると、無限遠方での液中音速は次のように表される。

$$a_\infty = \sqrt{\frac{\kappa(p_\infty+B)}{\rho_\infty}} \quad (2.119)$$

式(2.115),(2.116)を線形化すると次の波動方程式を得る。

$$\left( \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \varphi = 0 \quad (2.120)$$

ここで、

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (2.121)$$

Laplacian  $\Delta$  は静止座標系の原点の取り方によらず一定であるため、図 2.1 の  $o_1$  を原点とする座標系  $(r_1, \theta_1)$  で定義される Laplacian  $\Delta_1$  と  $o_2$  を原点とする座標系  $(r_2, \theta_2)$  で定義される Laplacian  $\Delta_2$  とは同一のものとなる。さらに球形気泡の仮定および波動方程式の線形性を考慮すると、速度ポテンシャルは、各気泡中心まわりで定義される速度ポテンシャル  $\varphi_1(r_1, t)$  と  $\varphi_2(r_2, t)$  の線形和

$$\varphi = \varphi_1(r_1, t) + \varphi_2(r_2, t) \quad (2.122)$$

と表現される。したがって式(2.120)は次のように表される。

$$\left\{ \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r_I^2} \frac{\partial}{\partial r_I} \left( r_I^2 \frac{\partial}{\partial r_I} \right) \right\} \varphi_I = 0, \quad I = 1, 2 \quad (2.123)$$

このとき気泡表面での境界条件は 2.3 節の式(2.6)および

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla_I \varphi|^2 + h_{Iw} = 0 \quad (2.124)$$

$$h_{Iw} = \int_{p_\infty}^{p_{Iw}} \frac{dp}{\rho} \quad (2.125)$$

で与えられる。ここで、 $p_{Iw}$  は気泡壁圧力を表しており、 $p_{Iw}$  は次式のように表現される。

$$p_{Iw}(t) = p_v + p_{I\infty} \left( \frac{R_{I00}}{R_{I0}(t)} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_{I0}(t)} \quad (2.126)$$

なお、液体の粘性を考慮すると、式(2.126)の右辺に、 $-4\mu \dot{R}_{I0}(t)/R_{I0}(t)$  が付加される。式(2.125)は

$$\int_{p_\infty}^{p_{Iw}} \frac{dp}{\rho} = \frac{p_{Iw} - p_\infty}{\rho_\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{p_{Iw} - p_\infty}{\rho_\infty a_\infty^2} + \dots \right) \approx \frac{p_{Iw} - p_\infty}{\rho_\infty} \quad (2.127)$$

と近似されるため、境界条件式(2.124)は、 $1/a_\infty^2$ を含む項およびそれより高次の項を無視した近似のレベルでは、非圧縮性の場合の境界条件式(2.7)と一致する。

発散波に対する式(2.123)の解は次式で与えられる。



$$\varphi_I = -\frac{\tilde{F}_I(\zeta_{I-})}{r_I} \quad (2.128)$$

ここで,

$$\zeta_{I-} = t - \frac{r_I - R_{I0}(\zeta_{I-})}{a_\infty} \quad (2.129)$$

$\zeta_{I-}$  は気泡  $I$  の壁面から外向きの特性曲線であり,  $r_I = R_{I0}$  で,  $\zeta_{I-} = t$  を満足する. 未知関数  $\tilde{F}_I(\zeta_{I-})$  は境界条件式 (2.6) により決定される.

式 (2.128) を式 (2.6) に代入し,  $1/L^2$ ,  $1/(a_\infty L)$  を含む項およびそれらより高次の相互作用および圧縮性に関する項を無視すれば,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_I} \approx \frac{\partial \varphi_I}{\partial r_I} = \dot{R}_{I0} \quad (2.130)$$

を得る. 境界条件式 (2.130) は単一気泡の場合の境界条件と同じ形となっている. 以下では, 式 (2.7) および式 (2.130) を満足する気泡の運動方程式を導出する. なお, 以下の解析では  $1/L^2$ ,  $1/(a_\infty L)$ ,  $1/a_\infty^2$  を含む項およびそれらより高次の相互作用および圧縮性に関する項を無視する<sup>††</sup>.

### 2.7.2 圧縮性を考慮した2個の気泡の運動方程式

式 (2.128) を

$$\begin{aligned} \varphi_I &= -\frac{\tilde{F}_I(\zeta_{I-})}{r_I} \\ &= -\frac{1}{r_I} \left( \tilde{F}_{I0}(\zeta_{I-}) + \frac{1}{a_\infty} \tilde{F}_{I1}(\zeta_{I-}) + \frac{1}{a_\infty^2} \tilde{F}_{I2}(\zeta_{I-}) + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.131)$$

と展開し,  $1/a_\infty^2$  を含む項以上の高次の項を無視し

$$\frac{\partial \zeta_{I-}}{\partial r_I} \approx -\frac{1}{a_\infty} \quad (2.132)$$

なる関係を用いると, 式 (2.130) は次のように表される.

$$\left[ \frac{\tilde{F}_{I0}}{R_{I0}^2} + \frac{1}{a_\infty R_{I0}} \left( \frac{\tilde{F}_{I1}}{R_{I0}} + \tilde{F}_{I0}' \right) \right]_{r_I=R_{I0}} = \dot{R}_{I0} \quad (2.133)$$

<sup>††</sup>このことは, 気泡  $I$  周辺での代表長さを  $R_{Ic}$ , 気泡壁速度の代表速度を  $u_c$  とし, 無次元量  $\varepsilon_I = R_{Ic}/L$ ,  $\delta_a = u_c/a_\infty$  を定義すると,  $\varepsilon_I^2$ ,  $\varepsilon_I \delta_a$ ,  $\delta_a^2$  以上の高次のオーダーの項を無視することに対応している.

ここで, " ' " は  $\zeta_{I-}$  に関する微分を表す. 式 (2.133) の右辺には  $1/a_\infty$  の項を含まないため

$$\tilde{F}_{I0} = R_{I0}^2 \dot{R}_{I0} \quad (2.134)$$

$$\tilde{F}_{I1} = -R_{I0} \tilde{F}_{I0}' \quad (2.135)$$

なる関係が得られる. これより

$$\tilde{F}_{I1} = -R_{I0}^2 (2\dot{R}_{I0}^2 + R_{I0} \ddot{R}_{I0}) \quad (2.136)$$

となり,  $\tilde{F}_I$  の関数形が次式のように決定される.

$$\tilde{F}_I = R_{I0}^2(\zeta_{I-}) \left[ \dot{R}_{I0}(\zeta_{I-}) - \frac{1}{a_\infty} \{ R_{I0}(\zeta_{I-}) \ddot{R}_{I0}(\zeta_{I-}) + 2\dot{R}_{I0}(\zeta_{I-}) \} \right] \quad (2.137)$$

式 (2.131) を境界条件式 (2.7) に代入すると, 以下の関係式が得られる.

$$\left[ -\frac{\tilde{F}_{I0}'}{R_{I0}} + \frac{\tilde{F}_{I0}''}{a_\infty} \right]_{r_I=R_{I0}} - \left[ \frac{\tilde{F}_{J0}'}{L} \right]_{r_J=L} + \frac{\dot{R}_{I0}^2}{2} + \frac{p_{Iw} - p_\infty}{\rho} = 0 \quad (2.138)$$

ここで,  $\tilde{F}_{I0}''|_{r_I=R_{I0}}$  は, 相互作用および圧縮性に関する項を無視すると,

$$\tilde{F}_{I0}''|_{r_I=R_{I0}} \approx 2R_{I0} \dot{R}_{I0} \ddot{R}_{I0} + 2\dot{R}_{I0}^3 + \frac{R_{I0} \dot{p}_{Iw}}{\rho_\infty} \quad (2.139)$$

と近似できるため, 式 (2.139) を式 (2.138) に代入すると, 以下に示す相互作用を含んだ2個の球形気泡の運動方程式が得られる.

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{2\dot{R}_{I0}(t)}{a_\infty} \right\} R_{I0}(t) \ddot{R}_{I0}(t) + \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{4\dot{R}_{I0}(t)}{3a_\infty} \right\} \dot{R}_{I0}^2(t) \\ & + \frac{1}{\rho_\infty} \left[ p_\infty + \rho_\infty \frac{R_{J0}(\zeta_{JI})}{L} \{ R_{J0}(\zeta_{JI}) \ddot{R}_{J0}(\zeta_{JI}) + 2\dot{R}_{J0}^2(\zeta_{JI}) \} \right. \\ & \left. - p_{Iw}(t) - \frac{R_{I0}(t)}{a_\infty} \dot{p}_{Iw}(t) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.140)$$

ここで,

$$\zeta_{JI} = t - \frac{L - R_{J0}(\zeta_{JI})}{a_\infty} \quad (2.141)$$

式 (2.140) は,  $a_\infty \rightarrow \infty$  とすると, 式 (2.18) で示した非圧縮性流体中での2個の球形気泡の運動方程式に帰着し,  $L \rightarrow \infty$  とすると, 圧縮性流体中での単一球形気泡の運動方程式 (Herring の式)<sup>(21),(22)</sup> に帰着する.



本章では、気泡間の相互作用を扱う第一歩として、2個の球形ならびに非球形気泡の運動方程式を導出した。まず最初に、非圧縮性・非粘性流体中での気泡の運動方程式が導かれた。それらは、気泡間の相互作用に起因する気泡の並進運動および変形が考慮されており、気泡周辺での代表長さを  $R_{Ic}$ 、初期気泡間距離を  $L_0$  とするとき、 $(R_{Ic}/L_0)^5$  のオーダーまで正しい。次に、非圧縮性・非粘性流体中での気泡の運動方程式を拡張し、並進運動および変形の一次のオーダーまで液体の粘性の効果を考慮した運動方程式が導出された。得られた運動方程式は、粘性によるポテンシャル場からの変化量を摂動展開する方法ならびに粘性によるエネルギー散逸を考慮した Lagrange の運動方程式を用いる方法により導かれたものであり、前者の場合には気泡周囲の粘性境界層が考慮されている。さらに、音波近似を用いることにより、液体の圧縮性を考慮した2個の球形気泡の運動方程式が導出された。以上、得られた気泡の運動方程式は特別な場合として、これまでに導出されている単一気泡ならびに2個の球形気泡の運動方程式に帰着することが示された。

- (1) Shima, A., *J. Basic Eng.*, **93**(1971), 426.
- (2) Wraith, A. E., and Kakutani, T., *Chem. Eng. Sci.*, **29**(1974), 1.
- (3) Miloh, T., *J. Eng. Math.*, **11**(1977), 349.
- (4) Hobson, E. W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, (1931), Cambridge Univ. Press.
- (5) Plesset, M. S., *J. Appl. Mech.*, **16**(1949), 277.
- (6) Hermans, J., *Ph.D Thesis*(Technical University of Eindhoven), (1973).
- (7) Chahine, G. L., and Liu, H. L., *J. Fluid Mech.*, **156**(1985), 257.
- (8) Chahine, G. L., *Proc. IAHR Symp. on Operating Problems of Pump Stations and Power Plants*, Amsterdam, **2-1**(1982), 1.
- (9) Chahine, G. L., *Proc. 14th Symp. on Naval Hydrodynamics*, Ann Arbor, Michigan, (1983), 165, National Academy Press.
- (10) Chahine, G. L., and Bovis, A. G., *J. Fluids Eng.*, **105**(1983), 356.
- (11) Plesset, M. S., *J. Appl. Phys.*, **25**(1954), 96.
- (12) Rayleigh, Lord, *Phil. Mag.*, **34**(1917), 94.
- (13) Batchelor, G. K., *Introduction to Fluid Dynamics*, (1967), Cambridge Univ. Press.
- (14) Prosperetti, A., *Q. Appl. Math.*, **34**(1977), 339.
- (15) Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, (1961), Clarendon Press.
- (16) Prosperetti, A. and Seminara, G., *Phys. Fluids*, **21**(1978), 1465.
- (17) Ceschia, M., and Nabergoj, R., *Phys. Fluids*, **21**(1978), 140.
- (18) Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th Ed., (1945), Dover Publication.
- (19) Knapp, R. T., et al., *Cavitation*, (1970), McGraw-Hill Book Company.
- (20) Cole, R. H., *Underwater Explosions*, (1948), Princeton Univ. Press.
- (21) Herring, C., *Columbia Univ. NDRC Rep.*, C-4-sr10-010(1941).
- (22) Trilling, L., *J. Appl. Phys.*, **23**(1952), 14.



### 第3章 気泡群の力学

#### 3.1 緒言

第2章では、気泡間の相互作用の本質を理解するために、2個の気泡の運動方程式を導出した。本章では2個の気泡の理論を拡張し、3次元空間内の任意の位置に分布している  $N$  個の気泡群の運動方程式を導出する。

第1章でも述べたように気泡群の挙動を扱う方法としては、大きく分けて、気泡の変形等を含めた個々の気泡の微視的な運動を解析する方法と、個々の気泡の運動は考えず、平均化した気液二相流の方程式を用いて巨視的な気泡群の挙動を扱う方法がある。Omta<sup>(1)</sup>およびd'Agostinoら<sup>(2)</sup>は後者の立場で球状に分布した球形気泡群の振動について解析し、気泡群の固有振動数が単一気泡の固有振動数に比べて低下することを示している。一方、Chahineら<sup>(3)~(5)</sup>は前者の立場で、特異摂動法を用いて気泡群の挙動を解析している。しかし、彼らの解析結果はそれぞれの気泡中心と気泡群の中心とを結ぶ軸に対して軸対称な変形にのみ有効であり、気泡の3次元的な変形を扱うことができなかった。そのため、個々の気泡の挙動は本質的には2個の気泡の場合と同じであった。さらに、第2章でも触れたように彼らの解析において並進運動の取り扱いが流体力学的に一貫していない。2個の気泡の運動の解析は気泡間の相互作用の本質を理解する上で最も基本的な問題であるが、より厳密に複数個の気泡群の挙動を扱うことが必要となろう。

本章では、まず3.2節で、非圧縮・非粘性流体中で気泡群の運動方程式を気泡の半径方向運動、並進運動および変形を考慮して導出する。次に3.3節では、3.2節で導出した球形モードの運動方程式を用いて、気泡の自由振動に関する特性方程式を導出し、気泡間の相互作用が気泡群の固有振動数に及ぼす効果を解析する。3.4節では、2.6節で述べた粘性散逸を考慮したLagrangeの運動方程式を用いることにより、気泡の3次元運動に粘性の効果を考慮する。最後に3.5節では、圧縮性を考慮した変動圧力場における球形気泡群の運動方程式を導出する。

#### 3.2 非圧縮・非粘性流体中での気泡群の運動方程式

##### 3.2.1 基礎方程式

最初、液体中で  $N$  個の球形気泡 (初期半径  $R_{I00}$ ;  $I = 1, 2, \dots, N$ ) が平衡を保っている状況を考える。ある瞬間に、周囲液体圧が一様に変動し、これによって、気泡が成長・崩壊する問題を扱う。ただし、本章でも共通に2.2節と同様の仮定を設け、さらに、本節では周囲液体の圧縮性・粘性を無視し、渦なし流れを仮定する。したがって、周囲液体に対して速度ポテンシャル  $\varphi$  が定義され、 $\varphi$  はLaplace方程式を満足する。このとき、図3.1に示すように、静止座標系の原点を  $O$ 、速度  $\vec{v}_I$  で並進運動をしている気泡  $I$  の中心を  $O_I$  とし、 $O_I$  を原点とするデカルト座標  $x_I, y_I, z_I$  と極座標  $r_I, \theta_I, \psi_I$  を定義する。ここで、静止座標系と移動座標系の3軸の方向は一致している。また、 $O_I$  と気泡  $J$  の中心  $O_J$  との距離を  $L_{IJ}$  とし、液体中の任意の点  $Q$  に対するベクトル  $\vec{O_I Q}$  と  $\vec{O_I O_J}$  とのなす角を  $\omega_{IJ}$  とする。

極座標  $r_I, \theta_I, \psi_I$  を用いると、無限遠方で液体が静止しているという境界条件を満足するLaplace方程式の解は次のように与えられる。

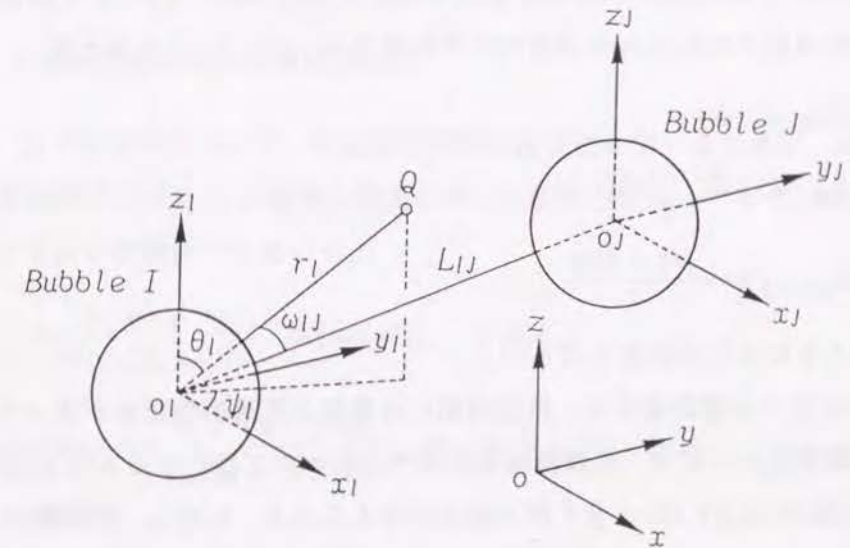


図3.1 座標系



$$\varphi = \sum_{I=1}^N \left\{ \frac{q_{I0}(t)}{r_I} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{q_{Inm}(t)}{r_I^{n+1}} Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) \right\} \quad (3.1)$$

ここで,

$$Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) = P_n^{(m)}(\cos \theta_I) e^{im\psi_I} \quad (3.2)$$

式(3.1)において,  $q_{I0}, q_{Inm}$  は  $t$  を変数とする未知関数,  $Y_{nm}(\theta_I, \psi_I)$  は球面調和関数を表している. 式(3.2)の  $P_n^{(m)}(\cos \theta_I)$  は Legendre 陪関数,  $i$  は虚数単位を表しており,  $m=0$  の場合  $Y_{nm}$  は Legendre 関数  $P_n(\cos \theta_I)$  に帰着する. そのため, 軸対称問題の場合には,  $m=0$  とすればよい. 式(3.1)中の  $q_{I0}/r_I$  は気泡  $I$  の半径方向の運動を,  $q_{I1m}/r_I^2$  は気泡の並進運動を,  $q_{Inm}/r_I^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) は気泡の球形からの変形を記述する速度ポテンシャルを表している. 同様に気泡表面を  $Y_{nm}$  を用いて次のように表現する.

$$S_I = r_I - R_I = 0$$

$$R_I = R_{I0}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{Inm}(t) Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) \quad (3.3)$$

ここで,  $R_{I0}$  は球形モード,  $R_{Inm}$  ( $n=2, 3, \dots$ ) は球形からの変形量を表している.  $R_{I1m}$  ( $m=-1, 0, 1$ ) 成分は移動座標系を用いる場合には, 2.4.1 節での議論と同様に, 球形気泡  $I$  の中心  $o_I$  の各方向の移動量を  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  とするとき

$$R_{I10} = -\Delta z$$

$$R_{I11} = -\frac{\Delta x - i\Delta y}{2}$$

$$R_{I1(-1)} = -\frac{\Delta x + i\Delta y}{2} \quad (3.4)$$

と選ぶことにより不必要となる<sup>(6)</sup>.

$S_I = 0$  上での境界条件は, 気泡内部には蒸気と非凝縮性気体が入っているものとし, 蒸気圧は一定で, 非凝縮性気体はポリトロップ変化するものと仮定すると, 2.4 節の式(2.24), (2.25) と全く同じ形式で与えられる. ただし, 空間微分は  $\psi_I$  方向にも考える. また, 速度ベクトル  $\vec{v}_I$  は極座標系  $I$  の単位ベクトル  $\vec{e}_{r_I}, \vec{e}_{\theta_I}, \vec{e}_{\psi_I}$  を用いて次のように表現される.

$$\vec{v}_I = \sum_{m=-1}^1 v_{Im} \left\{ P_1^{(m)} \vec{e}_{r_I} + \frac{dP_1^{(m)}}{d\theta_I} \vec{e}_{\theta_I} + \frac{im}{\sin \theta_I} P_1^{(m)} \vec{e}_{\psi_I} \right\} e^{im\psi_I} \quad (3.5)$$

平均曲率  $H_I$  は式(3.3)を用いて

$$H_I = \frac{1}{R_{I0}} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(n-1)(n+2)R_{Inm}}{2R_{I0}} Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) + \dots \right\} \quad (3.6)$$

のように表される.

なお, 上述の速度ポテンシャルおよび気泡形状は複素数  $i$  を用いて表現しているが

$$q_{Inm}^{(c)} = q_{Inm} + q_{In(-m)}$$

$$q_{Inm}^{(s)} = i(q_{Inm} - q_{In(-m)})$$

$$R_{Inm}^{(c)} = R_{Inm} + R_{In(-m)}$$

$$R_{Inm}^{(s)} = i(R_{Inm} - R_{In(-m)}), \quad 1 \leq m \leq n \quad (3.7)$$

なる変数を定義すると, 式(3.1)および式(3.3)は実数表示に変換される. しかし, 複素数を用いた方が取り扱いが簡便であるため以下では複素数表示を用いる.

### 3.2.2 $N$ 個の非球形気泡の運動方程式

さて, 以下の解析において, 球面調和関数の直交性を用いるために, 式(3.1)における極座標系  $J$  ( $I \neq J$ ) の変数を極座標系  $I$  の変数に変換しておく. 球面調和関数に関する以下の関係<sup>(7)</sup>を用いると

$$\frac{1}{r_J} = \frac{1}{L_{IJ}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_I}{L_{IJ}} \right)^n P_n(\cos \omega_{IJ}), \quad r_I < L_{IJ} \quad (3.8)$$

$$P_n(\cos \omega_{IJ}) = \sum_{m=-n}^n \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \quad (3.9)$$

ここで,

$$\bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) = P_n^{(m)}(\cos \theta_{IJ}) e^{-im\psi_{IJ}} \quad (3.10)$$



気泡  $J$  ( $I \neq J$ ) の球形モードの速度ポテンシャルは、気泡  $I$  近傍で次のように表現される。

$$\frac{q_{J0}}{r_J} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{q_{J0} r_I^n (n-|m|)!}{L_{IJ}^{n+1} (n+|m|)!} \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) Y_{nm}(\theta_I, \psi_I),$$

$$r_I < L_{IJ} \quad (3.11)$$

ここで、 $(L_{IJ}, \theta_{IJ}, \psi_{IJ})$  は、ベクトル  $\vec{o_I o_J}$  の座標系  $o_I$  に対する極座標成分を表している。

次に、気泡  $I$  の各モードに及ぼす、他の気泡からの相互作用の効果をオーダー評価するために、2.4.2 節の式 (2.38) と同様に以下に示す微小パラメーターを定義する。

$$\varepsilon_{IJ} = R_{Ic}/L_{IJ0} \quad (3.12)$$

ここで、 $R_{Ic}$  は気泡  $I$  周辺での代表長さを表し、その定義は 2.4.2 節と同様である。 $L_{IJ0}$  は気泡  $I$  と気泡  $J$  との初期気泡間距離を表している。気泡周囲の液体圧力が初期状態から  $|\Delta p| (= \text{const.})$  上昇または低下すると仮定すると、気泡  $I$  の代表時間  $t_0$  は式 (2.39) で与えられる。

$R_{Ic}, L_{IJ0}, t_0$  を用いて以下に示す無次元量を定義する。

$$r_I^* = r_I/R_{Ic}, \quad L_{IJ}^* = L_{IJ}/L_{IJ0}, \quad w_{IJ} = R_{Jc}/R_{Ic},$$

$$q_{I0}^* = q_{I0}/(R_{Ic}^3/t_0), \quad q_{Inm}^* = q_{Inm}/(R_{Ic}^{n+3}/t_0),$$

$$\varphi^* = \varphi/(R_{Ic}^2/t_0) \quad (3.13)$$

式 (2.39), (3.11)~(3.13) を用いると式 (3.1) は次のように無次元化される。

$$\varphi^* = \frac{q_{I0}^*}{r_I^*} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{q_{Inm}^*}{r_I^{*n+1}} Y_{nm}(\theta_I, \psi_I)$$

$$+ \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{\varepsilon_{IJ}^{n+1} w_{IJ}^3 q_{J0}^* r_I^{*n} (n-|m|)!}{L_{IJ}^{*n+1} (n+|m|)!} \right.$$

$$\times \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) + \dots \left. \right\}, \quad \varepsilon_{IJ} r_I^* < L_{IJ}^* \quad (3.14)$$

さて 2.4.2 節で議論したように、気泡は最初、球形を保って静止していることから、気泡の並進運動および変形は気泡間の相互作用 (式 (3.14) の右辺第 3 項) により引き起こされることになる。したがって、式 (3.14) において球面調和関数の直交性を考慮すると、2 個の気泡の場合と同様に、 $q_{Inm}^*$  ( $n \geq 1$ ) は  $\varepsilon_{IJ}^{n+1}$  のオーダーの量であることがわかる。すなわち、気泡  $I$  の並進運動 ( $n=1$  成分) は  $\varepsilon_{IJ}^2$  のオーダーで、 $n$  次の変形は  $\varepsilon_{IJ}^{n+1}$  のオーダーで引き起こされることになる。以上のオーダー評価は特異摂動法を用いた Chahine ら<sup>(3)~(5)</sup> のものと一致している。

いま、式 (2.57) と同様に気泡  $I$  周辺で  $\varepsilon_{IJ}^5$  のオーダーまで正しい速度ポテンシャルを求めると、速度ポテンシャルは有次元表示で次のように表現される。

$$\varphi = \frac{q_{I0}}{r_I} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{q_{Inm}}{r_I^{n+1}} Y_{nm}(\theta_I, \psi_I)$$

$$+ \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \frac{q_{J0} r_I^n (n-|m|)!}{L_{IJ}^{n+1} (n+|m|)!} \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) \right\} \right.$$

$$\left. + \left\{ c_{J0} + \sum_{m=-1}^1 c_{J1m} r_I Y_{1m}(\theta_I, \psi_I) \right\} \right], \quad r_I < L_{IJ} \quad (3.15)$$

ここで、

$$c_{J0} = - \sum_{m=-1}^1 \frac{q_{J1m}}{L_{IJ}^2} Y_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \quad (3.16)$$

$$c_{J10} = \frac{q_{J10}}{L_{IJ}^3} - 3 \sum_{m=-1}^1 \frac{q_{J1m} Y_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) P_1(\cos \theta_{IJ})}{L_{IJ}^3} \quad (3.17)$$

$$c_{J1(\pm 1)} = \frac{q_{J1(\pm 1)}}{L_{IJ}^3} - \frac{3}{2} \sum_{m=-1}^1 \frac{q_{J1m} Y_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \bar{Y}_{1(\pm 1)}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ})}{L_{IJ}^3} \quad (3.18)$$

なお、 $n \geq 5$  成分は、 $\varepsilon_{IJ}^6$  以上のオーダーの量であるが、式 (2.57) と同様に高次の変形を表すために残しておく。



式(3.15)を式(2.24)に代入し、2個の気泡の場合と同様に、並進運動に関する量( $n=1$ 成分)×変形に関する量( $n \geq 2$ 成分)(例えば  $q_{I1m} \times R_{Inm}$  ( $n \geq 2$ ))の項を考慮し、変形に関する量の二乗以上(例えば  $q_{Inm} \times R_{Inm}$ ,  $q_{I1m} \times R_{Inm}^2$  ( $n \geq 2$ ))の高次の項を無視し、球面調和関数の直交性に関する関係式

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} Y_{\nu\mu} \bar{Y}_{nm} d\psi_I \right\} \sin \theta_I d\theta_I &= \frac{4\pi(n+|m|)!}{(n-|m|)!(2n+1)}, \quad \nu = n, \quad \mu = m \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} Y_{10} Y_{\nu\mu} \bar{Y}_{nm} d\psi_I \right\} \sin \theta_I d\theta_I &= \frac{4\pi(n+|m|+1)!}{(n-|m|)!(2n+1)(2n+3)}, \quad \nu = n+1, \quad \mu = m \\ &= \frac{4\pi(n+|m|)!}{(n-|m|-1)!(2n-1)(2n+1)}, \quad \nu = n-1, \quad \mu = m \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} Y_{11} Y_{\nu\mu} \bar{Y}_{nm} d\psi_I \right\} \sin \theta_I d\theta_I &= -\frac{4\pi(n+|m|)!}{(n-|m|)!(2n+1)(2n+3)}, \quad \nu = n+1, \quad \mu = m-1, \quad m \geq 1 \\ &= \frac{4\pi(n+|m|)!}{(n-|m|)!(2n-1)(2n+1)}, \quad \nu = n-1, \quad \mu = m-1, \quad m \geq 1 \\ &= \frac{4\pi(n+|m|+2)!}{(n-|m|)!(2n+1)(2n+3)}, \quad \nu = n+1, \quad \mu = m-1, \quad m \leq 0 \\ &= -\frac{4\pi(n+|m|)!}{(n-|m|-2)!(2n-1)(2n+1)}, \quad \nu = n-1, \quad \mu = m-1, \quad m \leq 0 \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} Y_{1(-1)} Y_{\nu\mu} \bar{Y}_{nm} d\psi_I \right\} \sin \theta_I d\theta_I &= \frac{4\pi(n+|m|+2)!}{(n-|m|)!(2n+1)(2n+3)}, \quad \nu = n+1, \quad \mu = m+1, \quad m \geq 0 \\ &= -\frac{4\pi(n+|m|)!}{(n-|m|-2)!(2n-1)(2n+1)}, \quad \nu = n-1, \quad \mu = m+1, \quad m \geq 0 \\ &= -\frac{4\pi(n+|m|)!}{(n-|m|)!(2n+1)(2n+3)}, \quad \nu = n+1, \quad \mu = m+1, \quad m \leq -1 \\ &= \frac{4\pi(n+|m|)!}{(n-|m|)!(2n-1)(2n+1)}, \quad \nu = n-1, \quad \mu = m+1, \quad m \leq -1 \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial Y_{10}}{\partial \theta_I} \frac{\partial Y_{\nu\mu}}{\partial \theta_I} + \frac{1}{\sin^2 \theta_I} \frac{\partial Y_{10}}{\partial \psi_I} \frac{\partial Y_{\nu\mu}}{\partial \psi_I} \right) \bar{Y}_{nm} d\psi_I \right\} \sin \theta_I d\theta_I &= \frac{4\pi(n+|m|+1)!(n+2)}{(n-|m|)!(2n+1)(2n+3)}, \quad \nu = n+1, \quad \mu = m \\ &= -\frac{4\pi(n+|m|)!(n-1)}{(n-|m|-1)!(2n-1)(2n+1)}, \quad \nu = n-1, \quad \mu = m \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial Y_{11}}{\partial \theta_I} \frac{\partial Y_{\nu\mu}}{\partial \theta_I} + \frac{1}{\sin^2 \theta_I} \frac{\partial Y_{11}}{\partial \psi_I} \frac{\partial Y_{\nu\mu}}{\partial \psi_I} \right) \bar{Y}_{nm} d\psi_I \right\} \sin \theta_I d\theta_I &= -\frac{4\pi(n+|m|)!(n+2)}{(n-|m|)!(2n+1)(2n+3)}, \quad \nu = n+1, \quad \mu = m-1, \quad m \geq 1 \\ &= -\frac{4\pi(n+|m|)!(n-1)}{(n-|m|)!(2n-1)(2n+1)}, \quad \nu = n-1, \quad \mu = m-1, \quad m \geq 1 \\ &= \frac{4\pi(n+|m|+2)!(n+2)}{(n-|m|)!(2n+1)(2n+3)}, \quad \nu = n+1, \quad \mu = m-1, \quad m \leq 0 \\ &= \frac{4\pi(n+|m|)!(n-1)}{(n-|m|-2)!(2n-1)(2n+1)}, \quad \nu = n-1, \quad \mu = m-1, \quad m \leq 0 \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial Y_{1(-1)}}{\partial \theta_I} \frac{\partial Y_{\nu\mu}}{\partial \theta_I} + \frac{1}{\sin^2 \theta_I} \frac{\partial Y_{1(-1)}}{\partial \psi_I} \frac{\partial Y_{\nu\mu}}{\partial \psi_I} \right) \bar{Y}_{nm} d\psi_I \right\} \sin \theta_I d\theta_I &= \frac{4\pi(n+|m|+2)!(n+2)}{(n-|m|)!(2n+1)(2n+3)}, \quad \nu = n+1, \quad \mu = m+1, \quad m \geq 0 \\ &= \frac{4\pi(n+|m|)!(n-1)}{(n-|m|-2)!(2n-1)(2n+1)}, \quad \nu = n-1, \quad \mu = m+1, \quad m \geq 0 \\ &= -\frac{4\pi(n+|m|)!(n+2)}{(n-|m|)!(2n+1)(2n+3)}, \quad \nu = n+1, \quad \mu = m+1, \quad m \leq -1 \\ &= -\frac{4\pi(n+|m|)!(n-1)}{(n-|m|)!(2n-1)(2n+1)}, \quad \nu = n-1, \quad \mu = m+1, \quad m \leq -1 \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned} \quad (3.25)$$

を用いると、 $q_{I0}$ ,  $q_{Inm}$  ( $n \geq 1$ ) は

$$q_{I0} = -R_{I0}^2 \dot{R}_{I0} \quad (3.26)$$

$$q_{I1m} = -\frac{R_{I0}^3}{2} (v_{I1m} + F_{I1m}), \quad -1 \leq m \leq 1 \quad (3.27)$$



$$q_{Inm} = -\frac{R_{I0}^{n+2}}{n+1} \left\{ \dot{R}_{Inm} + \frac{2\dot{R}_{I0}R_{Inm}}{R_{I0}} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{nR_{I0}^{n-1}q_{J0}}{L_{IJ}^{n+1}} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) + F_{Inm} \right\},$$

$$n \geq 2, \quad -n \leq m \leq n \quad (3.28)$$

と表される。ここで、

$$v_{Imr} = v_{Im} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{q_{J0}}{L_{IJ}^2} \frac{(1-|m|)!}{(1+|m|)!} \bar{Y}_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}), \quad -1 \leq m \leq 1 \quad (3.29)$$

$$F_{I10} = -\frac{3}{5R_{I0}} \left\{ R_{I20}v_{I0r} + 3R_{I2(-1)}v_{I1r} + 3R_{I21}v_{I(-1)r} \right\} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N c_{J10} \quad (3.30)$$

$$F_{I1(\pm 1)} = -\frac{3}{10R_{I0}} \left\{ 3R_{I2(\pm 1)}v_{I0r} - R_{I20}v_{I(\pm 1)r} + 12R_{I2(\pm 2)}v_{I(\mp 1)r} \right\} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N c_{J1(\pm 1)} \quad (3.31)$$

$$F_{In0} = \frac{3n(n+1)}{2(2n-1)R_{I0}} \left\{ R_{I(n-1)0}v_{I0r} - (n-1)R_{I(n-1)(-1)}v_{I1r} - (n-1)R_{I(n-1)1}v_{I(-1)r} \right\}, \quad n \geq 3 \quad (3.32)$$

$$F_{In(\pm m)} = \frac{3(n+1)}{2(2n-1)R_{I0}} \left\{ (n-m)R_{I(n-1)(\pm m)}v_{I0r} - (n-m)(n-m-1)R_{I(n-1)\pm(m+1)}v_{I(\mp 1)r} + R_{I(n-1)\pm(m-1)}v_{I(\pm 1)r} \right\},$$

$$n \geq 3, \quad 1 \leq m \leq n \quad (3.33)$$

ただし、式(3.33)の  $R_{I(n-1)\hat{m}}$  ( $\hat{m}=\pm m$  または  $\pm(m+1)$ ) において、 $|\hat{m}| > n-1$  のときには、 $R_{I(n-1)\hat{m}}=0$  とする。 $F_{I1m}$  および  $F_{Inm}$  ( $n \geq 3, F_{I2m}=0$ ) は、気泡の並進運動が  $q_{I1m}$  および  $q_{Inm}$  に及ぼす効果を表す項で、それぞれ、 $\varepsilon_{IJ}^5$  および  $\varepsilon_{IJ}^{n+2}$  のオーダーの量である。2個の気泡の場合と同様に、 $q_{I0}, q_{I1m}, q_{Inm}$  ( $n \leq 3$ ) は、 $\varepsilon_{IJ}^5$  の

オーダーの項まで考慮されており、 $\varepsilon_{IJ}^6$  以上のオーダーの項は無視されている。また、変形量の二乗を含む項を無視していることから、 $n \geq 4$  成分の  $\varepsilon_{IJ}^{n+2}$  のオーダーの項は厳密ではなく、全体としては、 $\varepsilon_{IJ}^5$  の精度となる。式(3.26)~(3.28)は  $N=2, \theta_{IJ}=0$  とすると2個の気泡に関する式(2.58)~(2.60)に一致する。

式(3.15)を式(2.25)に代入し、 $q_{I0}, q_{Inm}$  ( $n \geq 1$ ) ならびに式(2.63)~(2.65)の導出と同様の近似を施すと以下に示すような  $N$  個の気泡の運動方程式が得られる。

$$R_{I0}\ddot{R}_{I0} + \frac{3}{2}\dot{R}_{I0}^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ -p_\infty + p_v + p_{I0} \left( \frac{R_{I00}}{R_{I0}} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_{I0}} \right\} + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{q_{J0}}{L_{IJ}} \right) + G_{I0} \quad (3.34)$$

$$R_{I0}\dot{v}_{Im} + 3\dot{R}_{I0}v_{Im} = \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{3(1-|m|)!}{(1+|m|)!} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{R_{I0}q_{J0}}{L_{IJ}^2} \bar{Y}_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \right\} + G_{I1m}, \quad -1 \leq m \leq 1 \quad (3.35)$$

$$R_{I0}\ddot{R}_{Inm} + 3\dot{R}_{I0}\dot{R}_{Inm} + (n-1)R_{Inm} \left\{ -\ddot{R}_{I0} + \frac{(n+1)(n+2)\sigma}{R_{I0}^2\rho} \right\} = \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{(2n+1)(n-|m|)! \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ})}{(n+|m|)! L_{IJ}^{n+1}} \frac{d}{dt} (R_{I0}^n q_{J0}) + G_{Inm}, \quad n \geq 2, \quad -n \leq m \leq n \quad (3.36)$$

ここで、 $G_{I0}$  は  $\varepsilon_{IJ}^4$ ,  $G_{I1m}$  は  $\varepsilon_{IJ}^5$ ,  $G_{Inm}$  ( $n \geq 2$ ) は  $\varepsilon_{IJ}^{n+2}$  のオーダーの項で、並進運動がそれぞれのモードに及ぼす効果を表しており、その詳細は付録に示す。これらの式は全体で  $\varepsilon_{IJ}^5$  の精度であり ( $n \geq 4$  の変形モードの運動方程式は  $O(\varepsilon_{IJ}^{n+2})$  の誤差を含む),  $N=2, \theta_{IJ}=0$  とすると2個の気泡の運動方程式(2.63)~(2.65)に帰着する。

式(3.34)は球形モードの運動を表し、 $N=2, L_{IJ}=\text{const.}, G_{I0}=0$  とすると2個の球形気泡の運動方程式<sup>(8)</sup>に、 $L_{IJ} \rightarrow \infty, G_{I0}=0$  とすると単一球形気泡に関する Rayleigh-Plesset の式<sup>(9)</sup>に帰着する。式(3.36)は気泡変形を記述する方程式で  $L_{IJ} \rightarrow \infty, G_{Inm}=0$  とすると単一気泡の安定方程式<sup>(10)</sup>に帰着する。



式(3.35)は気泡の並進運動を表しているが、物理的な意味を明確にするためにデカルト座標表示に変換してみる。\$v\_{Im}\$は以下の関係を満足する。

$$v_{Ix} = v_{I1} + v_{I(-1)}, \quad v_{Iy} = i(v_{I1} - v_{I(-1)}), \quad v_{Iz} = v_{I0} \quad (3.37)$$

ここで、\$v\_{Ix}, v\_{Iy}, v\_{Iz}\$はそれぞれ\$x, y, z\$方向の速度成分を表している。式(3.35)の\$G\_{I1m}\$を無視すると、式(3.35)は次のように変形される。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho V_{Ib} v_{Ik} \right) - \rho V_{Ib} \frac{dv_{Ik}}{dt} = 0, \quad k = x, y, z \quad (3.38)$$

ここで、

$$V_{Ib} = \frac{4\pi R_{I0}^3}{3} \quad (3.39)$$

$$v_{Ixr} = v_{Ix} - u_{Ix}, \quad u_{Ix} = \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{q_{J0}}{L_{IJ}^2} \sin \theta_{IJ} \cos \psi_{IJ} \quad (3.40)$$

$$v_{Iyr} = v_{Iy} - u_{Iy}, \quad u_{Iy} = \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{q_{J0}}{L_{IJ}^2} \sin \theta_{IJ} \sin \psi_{IJ} \quad (3.41)$$

$$v_{Izr} = v_{Iz} - u_{Iz}, \quad u_{Iz} = \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{q_{J0}}{L_{IJ}^2} \cos \theta_{IJ} \quad (3.42)$$

これらの式より、\$v\_{Ik}\$ (\$k = x, y, z\$)は、他の気泡により、それぞれ\$x, y, z\$方向に誘起される流体の速度(球の中心で評価)に対する気泡の相対並進移動速度を表していることがわかる。また、式(3.38)の第1項は付加質量の加速による力(付加質量係数は1/2)、第2項は他の気泡により誘起される圧力勾配による力を表していることがわかる。

液体の圧力は2個の気泡の場合と同様に、式(2.78)で与えられる。

### 3.3 気泡群の固有振動数

#### 3.3.1 特性方程式

ここでは、気泡振動は微小であるとし、個々の気泡の並進運動および変形を無視し、球形モードの運動方程式(3.34)のみを議論する。気泡は平衡半径まわりに微小振動しているものとし、気泡半径を次のように展開する。

$$R_{I0} = R_{Ie}(1 + \hat{\xi}_I), \quad |\hat{\xi}_I| \ll 1 \quad (3.43)$$

ここで、\$R\_{Ie}\$は気泡の平衡半径を表しており、\$\hat{\xi}\_I\$は\$R\_{Ie}\$からの変化を表している。式(3.34)を線形化すると以下に示す線形常微分方程式を得る。

$$\hat{a}_{II} \ddot{\hat{\xi}}_I + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \hat{a}_{IJ} \ddot{\hat{\xi}}_J + \hat{b}_{II} \hat{\xi}_I = 0 \quad (3.44)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \hat{a}_{II} &= R_{Ie}^5, \quad \hat{a}_{IJ} = \frac{(R_{Ie} R_{Je})^3}{L_{IJ}} \quad (I \neq J), \\ \hat{b}_{II} &= \frac{R_{Ie}^3}{\rho} \left\{ 3\gamma(p_\infty - p_v) + \frac{2\sigma(3\gamma - 1)}{R_{Ie}} \right\}, \quad \hat{b}_{IJ} = 0 \quad (I \neq J) \end{aligned} \quad (3.45)$$

\$\hat{a}\_{IJ}, \hat{b}\_{IJ}\$ (\$I, J=1, 2, \dots, N\$)を成分とする行列\$\hat{A}\$および\$\hat{B}\$を定義すると、\$\hat{A}, \hat{B}\$はともに実対称行列となる。式(3.44)の解を次のように与えると

$$\hat{\xi}_I = \eta_I e^{i\Omega t} \quad (3.46)$$

\$\Omega\$は以下の特性方程式を満足する。

$$\det[\Omega^2 \hat{A} - \hat{B}] = 0 \quad (3.47)$$

ここで、式(3.47)の解について考える。\$N\$個の気泡が微小振動する仮定のもとでは、線形近似の範囲内で流体の持つ運動エネルギー\$\mathcal{K}\$は次の二次形式で与えられる。

$$\mathcal{K} = 2\pi\rho \sum_{I,J=1}^N \hat{a}_{IJ} \dot{\hat{\xi}}_I \dot{\hat{\xi}}_J \quad (3.48)$$



したがって、流体の持つ運動エネルギーを表す二次形式の係数は、行列  $\hat{A}$  の成分  $\hat{a}_{IJ}$  で表現されることがわかる。一般に運動エネルギーは正であるから、式(3.48)の二次形式は常に正となり、行列  $\hat{A}$  は正値対称行列となる。行列  $\hat{B}$  は明らかに、 $\hat{b}_{II} > 0$  ならば正値対称行列となるため、 $\hat{b}_{II} > 0$  ならば式(3.47)は  $N$  個の正根  $\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_N^2$  を持つことになる。以上より気泡群の固有振動数  $f_j$  は  $\Omega_j/2\pi$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) と与えられる。なお、単一球形気泡の固有振動数<sup>(11)</sup>、Shima<sup>(8)</sup>の導出した2個の球形気泡の固有振動数、藤原<sup>(12)</sup>の導出した平面剛体壁近傍の2個の球形気泡の固有振動数および Foody ら<sup>(13)</sup>の導出した表面張力を無視した場合の気泡群の固有振動数は式(3.47)の特別な場合として与えられる。

### 3.3.2 固有振動数

さて、具体的に代表的な気泡群のシステムの固有振動数を求める。

$$\vec{\eta} = [\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \dots, \hat{\xi}_N, \dot{\hat{\xi}}_1, \dot{\hat{\xi}}_2, \dots, \dot{\hat{\xi}}_N] \quad (3.49)$$

と変換すると、式(3.44)は

$$\dot{\vec{\eta}} = \hat{D}\vec{\eta}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{E} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = -\hat{A}^{-1}\hat{B} \quad (3.50)$$

と与えられる。ここで、 $\hat{E}$  は  $N \times N$  の単位行列を表している。行列  $\hat{D}$  の固有値  $\hat{\lambda}_d$  は、 $\hat{C}^{-1} (= -\hat{B}^{-1}\hat{A})$  の固有値  $\hat{\lambda}_c$  と次の関係がある。

$$\hat{\lambda}_d = \pm 1/\sqrt{\hat{\lambda}_c} \quad (3.51)$$

したがって、 $-\hat{a}_{IJ}/\hat{b}_{II}$  を成分とする行列の固有値を求めることにより気泡群の固有振動数が得られる。

解析解の一例として、一辺  $L_0$  の立方体の頂点とその中心に配置した同じ平衡半径  $R_e$  の9個の気泡の固有振動数は以下の式で与えられる。

$$f_j = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\hat{M}}{1 + \hat{\zeta}_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.52)$$

ここで、

$$\hat{\zeta}_1 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

$$\hat{\zeta}_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

$$\hat{\zeta}_3 = -3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

$$\hat{\zeta}_{4,5} = \frac{(3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4) \pm \sqrt{(3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2 + 32\varepsilon_1^2}}{2}$$

$$\hat{M} = \frac{1}{\rho R_e^2} \left\{ 3\gamma(p_\infty - p_v) + \frac{2\sigma(3\gamma - 1)}{R_e} \right\},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2R_e}{\sqrt{3}L_0}, \quad \varepsilon_2 = \frac{R_e}{L_0}, \quad \varepsilon_3 = \frac{R_e}{\sqrt{2}L_0}, \quad \varepsilon_4 = \frac{R_e}{\sqrt{3}L_0} \quad (3.53)$$

$f_1, f_2$  は三重に縮退しており、 $f_1 \sim f_3$  は中心にある気泡には無関係なモードとなる。 $f_4$  および  $f_5$  は頂点にある8個の気泡が共通の振動状態をとるモードを表しており、 $f_4$  はすべての気泡が同位相で振動するモードを、 $f_5$  は頂点にある8個の気泡と中心の気泡の位相が反転するモードを表している。

図3.2に  $\varepsilon_2 (= R_e/L_0)$  を変化させたときの固有振動数の変化を示す。計算条件は、20℃水中での気泡振動を仮定し、 $p_\infty = 101.3 \text{ kPa}$ ,  $p_v = 2.337 \text{ kPa}$ ,  $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma = 7.275 \times 10^{-2} \text{ N/m}$ ,  $\gamma = 1.33$ ,  $R_e = 1 \text{ mm}$  としている。比較のために単一気泡の固有振動数を一点鎖線で示す。図3.2から、 $f_4$  のみが単一気泡の固有振動数  $f_0$  より小さいことがわかる。また、気泡間距離が短くなり気泡間の相互作用が強くなるにつれて、気泡群の固有振動数と単一気泡の固有振動数との差は次第に大きくなることがわかる。この傾向はすべての気泡が同位相で振動する  $f_4$  に顕著にみられる。

図3.3(a)は、図3.3(b)に示すような一辺  $4 \times L_0$  の立方体格子状に等間隔に配置された125個の同じ平衡半径  $R_e$  の気泡の固有振動数と  $\varepsilon_2 (= R_e/L_0)$  との関係を表している。用いた計算条件は図3.2と同様である。この場合もいくつかのモードは縮退している。多くの固有振動数は単一気泡の固有振動数より高くなっているが、 $\varepsilon_2 = 0.2$  の場合でもその上限は単一気泡の約1.2倍であるのに対し、単一気泡の固有振動数より低い固有振動数は比較的広い振動数領域に分布し、最も低い場合には単一気泡の固有振動数の1/3以下になっていることがわかる。最低次の固有振動数はすべての気泡が同位相で運動するときに現れる。したがって、気泡群



周囲の圧力場が一様に変化するような状況では単一気泡の場合と比べてかなり低い振動数で気泡群のシステムの共振が起こるものと考えられる。そのため、現実のキャビテーションノイズのスペクトル分布は、単一気泡の理論により見積られる分布に比べて低周波数側に移行することが予測される。こうした気泡群のシステムの固有振動数が単一気泡に比べて低下することは、Omta<sup>(1)</sup>およびd'Agostinoら<sup>(2)</sup>の解析と一致する。

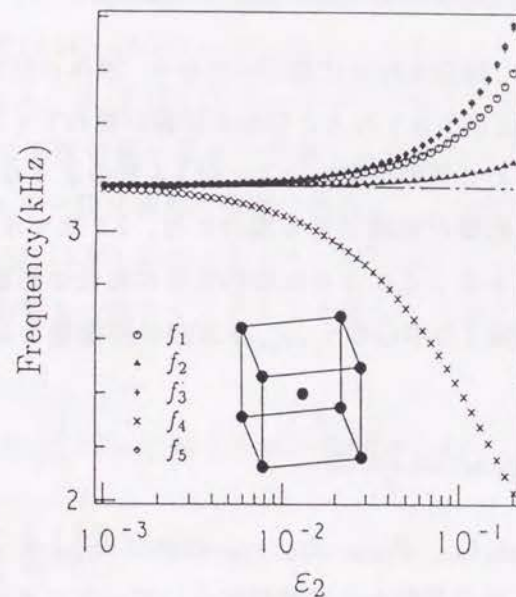


図 3.2 立方体の頂点と中心に配置された 9 個の気泡群の固有振動数

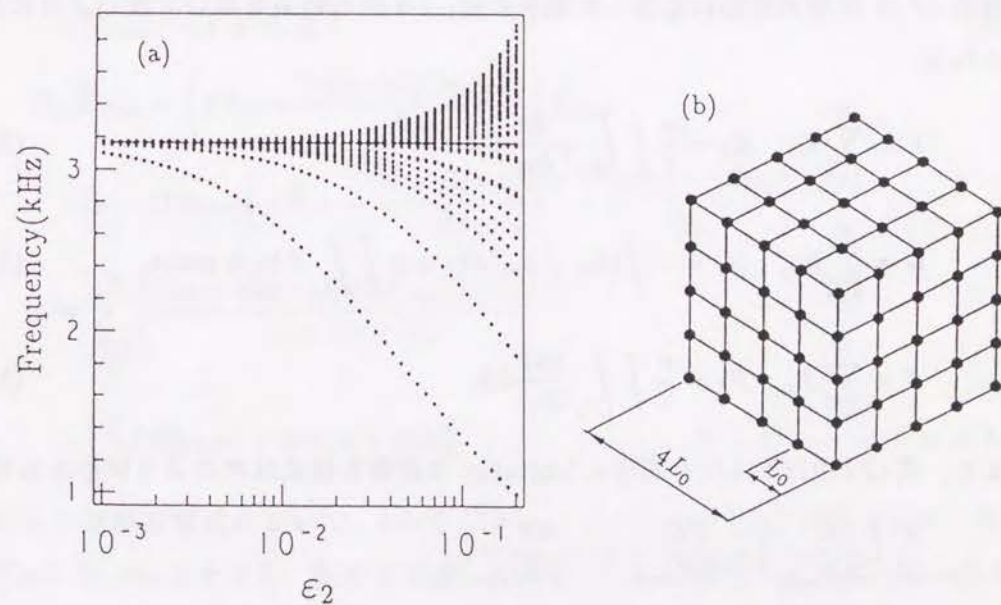


図 3.3 格子状に配置された気泡群の固有振動数  
(a) 固有振動数の変化  
(b) 気泡配置



### 3.4 粘性を考慮した気泡群の運動方程式

以上の議論は渦なし理論の仮定に基づいており、液体の粘性を無視していた。しかし、一般に気泡半径が小さくなると粘性の影響が現れてくる。厳密に気泡周囲の境界層の影響まで含めて運動を解析するには2.5節のような議論が必要であるが、境界層が薄く、その影響が無視できる場合には、2.6節で示したようにLagrangeの運動方程式を利用することにより比較的容易に粘性の影響を考慮することができる。ここでは、気泡 $I$ の中心の $x_I, y_I, z_I$ 方向の移動量を $b_{Ix}, b_{Iy}, b_{Iz}$ とし、変数 $b_{Im}$  ( $m = -1, 0, 1$ ) を

$$b_{I0} = b_{Iz}, \quad b_{I\pm 1} = \frac{b_{Ix} \mp ib_{Iy}}{2} \quad (3.54)$$

と定義するとき、 $R_{I0}, b_{Im}, R_{Inm}, \dot{R}_{I0}, v_{Im}$  および  $\dot{R}_{Inm}$  を一般化座標とみなしてLagrangianを求め、並進運動および変形について一次のオーダーまで粘性の影響を考慮する。

液体の持つ運動エネルギー $\mathcal{K}$ 、ポテンシャルエネルギー $\mathcal{U}$  およびエネルギー消散率 $2\mathcal{F}$ は $N$ 個の気泡に拡張した場合には、2.6節の結果を用いて次のように表現される。

$$\mathcal{K} = \sum_{I=1}^N \mathcal{K}_I, \quad \mathcal{K}_I = \frac{\rho}{2} \int \int_{A_I} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_I} dA_I \quad (3.55)$$

$$\mathcal{U} = \sum_{I=1}^N \mathcal{U}_I, \quad \mathcal{U}_I = - \int (p_{Ib} - p_\infty) dV_I + \sigma \int \int_{A_I} dA_I + \text{const.} \quad (3.56)$$

$$\mathcal{F} = \sum_{I=1}^N \mathcal{F}_I, \quad \mathcal{F}_I = \frac{\mu}{2} \int \int_{A_I} \frac{\partial u_I^2}{\partial n_I} dA_I \quad (3.57)$$

また、式(2.110),(2.111)と同様にLagrangeの運動方程式は次のように与えられる。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}_{Inm}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{Inm}} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{R}_{Inm}},$$

$$n = 0, 2, 3, \dots; \quad -n \leq m \leq n \quad (3.58)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{Im}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_{Im}} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{Im}}, \quad -1 \leq m \leq 1 \quad (3.59)$$

2.6節で述べたようにLagrangeの運動方程式には一般化座標に関する微分が含まれているため、式(3.34)~(3.36)に示したオーダーまで正しい気泡の運動方程式を得るには、あらかじめ、式(3.15), (3.26)~(3.28)で与えられる速度ポテンシャル $\varphi$ を求める際にさらに高次の微小量まで考慮する必要がある。詳細は省略するが、オーダーに注意して $\varphi$ を一般化座標の関数で表現し、 $\varphi$ を用いて $\mathcal{L}$ および $\mathcal{F}$ を計算し、それらを式(3.58),(3.59)に代入すると、以下に示すような並進運動および変形について粘性の影響を一次のオーダーまで考慮した $N$ 個の気泡の運動方程式が得られる。

$$R_{I0} \ddot{R}_{I0} + \frac{3}{2} \dot{R}_{I0}^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ -p_\infty + p_v + p_{I90} \left( \frac{R_{I00}}{R_{I0}} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_{I0}} \right\}$$

$$- \frac{4\nu \dot{R}_{I0}}{R_{I0}} + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{q_{J0}}{L_{IJ}} \right) + G_{I0} \quad (3.60)$$

$$R_{I0} \dot{v}_{Im} + 3 \dot{R}_{I0} v_{Im} + \frac{18\nu}{R_{I0}} v_{Imr} = \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{3(1-|m|)!}{(1+|m|)!} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{R_{I0} q_{J0}}{L_{IJ}^2} \bar{Y}_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \right\}$$

$$+ G_{I1m}, \quad -1 \leq m \leq 1 \quad (3.61)$$

$$R_{I0} \ddot{R}_{Inm} + \left\{ 3 \dot{R}_{I0} + \frac{2\nu(n+2)(2n+1)}{R_{I0}} \right\} \dot{R}_{Inm}$$

$$+ (n-1) R_{Inm} \left\{ -\ddot{R}_{I0} + \frac{(n+1)(n+2)\sigma}{R_{I0}^2 \rho} + \frac{2\nu(n+2) \dot{R}_{I0}}{R_{I0}^2} \right\}$$

$$= \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \left[ \frac{(2n+1)(n-|m|)! \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ})}{(n+|m|)! L_{IJ}^{n+1}} \right.$$

$$\left. \times \left\{ \frac{d}{dt} (R_{I0}^n q_{J0}) + 2\nu n(n+2) R_{I0}^{n-2} q_{J0} \right\} \right] + G_{Inm}, \quad n \geq 2, \quad -n \leq m \leq n \quad (3.62)$$

以上の運動方程式において、 $\nu=0$ とすると式(3.34)~(3.36)が得られる。また、 $N=2, \theta_{IJ}=0$ とすると、粘性を考慮した2個の気泡の運動方程式(2.103)~(2.105)において、気泡周囲の境界層に関する積分の項を無視した結果に一致する。

並進運動に関する式(3.61)を式(3.38)の場合と同様に変形すると、以下に示すデカルト座標表示の式が得られる。



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho V_{Ib} v_{Ik\tau} \right) - \rho V_{Ib} \frac{du_{Ik}}{dt} + \frac{C_{Dk}}{2} \pi R_{I0}^2 \rho v_{Ik\tau} |v_{Ik\tau}| = 0, \quad (3.63)$$

$$k = x, y, z$$

ここで,

$$C_{Dk} = \frac{48}{R_{ek}}, \quad R_{ek} = \frac{2R_{I0}|v_{Ik\tau}|}{\nu}, \quad k = x, y, z \quad (3.64)$$

式(3.63)の抗力係数 $C_{Dk}$  ( $k = x, y, z$ )は $48/R_{ek}$ となり, 単一気泡<sup>(14)</sup>および2個の気泡の場合と一致する. 以上の解析においては, 気泡表面に発達する境界層の影響が考慮されていないため, 気泡表面での速度勾配が過剰に見積られ, 式(3.60)~(3.62)における粘性の効果は, 少し大きめに評価される傾向にあるが<sup>(15)</sup>, このことは5.5節で論述される.

### 3.5 圧縮性を考慮した球形気泡群の運動方程式

本節では, 2.7節で導出した2個の球形気泡の運動方程式をさらに拡張し, 外部からの強制的な圧力変動を考慮して,  $N$ 個の球形気泡の運動方程式を導出する. 2.7節では, エンタルピー $h$ を

$$h = \int_{p_\infty}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty a_\infty^2} + \dots \right) \approx \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty} \quad (3.65)$$

と近似し, Herringの式<sup>(16),(17)</sup>に帰着する運動方程式を導いた. Prosperettiら<sup>(18),(19)</sup>の単一球形気泡の解析によると,  $1/a_\infty$ を含む項まで正しい( $1/a_\infty^2$ を含む項に誤差がある)種々の運動方程式においても, 気泡壁速度が大きくなるにつれて, 表現形式の違いにより精度が異なることが示されている. そこで, 本節では, 2.7節の結果を含み, さらに汎用性のあるエンタルピー項を用いて表された運動方程式を導出する. ただし, 以下の解析では, エンタルピーに暗に含まれる圧縮性に関する高次の項を除いて, 2.7節と同様に $1/L_{IJ}^2$ ,  $1/(a_\infty L_{IJ})$ ,  $1/a_\infty^2$ を含む項およびそれらより高次の相互作用および圧縮性に関する項を無視する. なお, 気泡に印加される圧力変動波形の波長は気泡群の代表長さ $L_c$ より十分大きいものとする.

#### 3.5.1 速度ポテンシャルと境界条件

2.6節で示したように球形気泡を仮定し,  $1/(a_\infty L_{IJ})$ ,  $1/L_{IJ}^2$ ,  $1/a_\infty^2$ を含む項およびそれらより高次の項を無視すると, 気泡周囲の流体に外部からの圧力変動がない場合には, 境界条件式(2.130)を満足する速度ポテンシャルは次式で与えられる.

$$\varphi = \sum_{I=1}^N \varphi_I \quad (3.66)$$

ここで,

$$\varphi_I = -\frac{1}{r_I} \left\{ \tilde{F}_{I0}(\zeta_{I-}) - \frac{R_{I0}(\zeta_{I-})}{a_\infty} \tilde{F}'_{I0}(\zeta_{I-}) \right\} \quad (3.67)$$

$$\tilde{F}_{I0} = R_{I0}^2(\zeta_{I-}) \dot{R}_{I0}(\zeta_{I-}) \quad (3.68)$$

$$\zeta_{I-} = t - \frac{r_I - R_{I0}(\zeta_{I-})}{a_\infty} \quad (3.69)$$



次に、この式に外部からの圧力変動が及ぼす効果を付加する。単一球形気泡の場合には、 $1/a_\infty$ を含む項まで正しい変動圧力場に関する速度ポテンシャル $\Phi$ は次のように表現される<sup>(19)</sup>。

$$\Phi = \frac{a_\infty}{r_I} \{ \Theta(\tau_{I+}) - \Theta(\tau_{I-}) \} + \frac{R_{I0}(t)}{r_I} \{ \dot{\Theta}(\tau_{I+}) + \dot{\Theta}(\tau_{I-}) \} + \frac{R_{I0}^2(t)}{2a_\infty r_I} \{ \ddot{\Theta}(\tau_{I+}) - \ddot{\Theta}(\tau_{I-}) \} \quad (3.70)$$

ここで、

$$\tau_{I\pm} = t \pm \frac{r_I - R_{I0}(t)}{a_\infty} \quad (3.71)$$

$\Theta(\tau_{I+})$  は気泡に加えられる入射波を、 $\Theta(\tau_{I-})$  はその反射波を表している。式(3.70)は変動圧力場のみの速度ポテンシャルを表しているため、 $1/a_\infty^2$ を含む項以上の高次の項を無視すると、

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial r_I} \right)_{r_I=R_{I0}} = 0 \quad (3.72)$$

となる。いま、変動圧力場の波長および周期を $\lambda_c$ および $T_c (= \lambda_c/a_\infty)$ 、気泡群の代表長さを $L_c (\lambda_c > L_c)$ とし、無次元量

$$\epsilon_c = L_c/\lambda_c, \quad \Theta^* = \Theta/\lambda_c^2, \quad \Phi^* = \Phi/(\lambda_c^2/T_c), \quad r_I^* = r_I/L_c, \quad R_{I0}^* = R_{I0}/L_c, \quad t^* = t/T_c, \quad \tau_{I\pm}^* = \tau_{I\pm}/T_c \quad (3.73)$$

を用いて、 $\Phi$ を $\epsilon_c$ で展開すると

$$\Phi^* = 2 \frac{d\Theta^*(t^*)}{dt^*} + O(\epsilon_c^2) \quad (3.74)$$

を得る。したがって、 $L_c/\lambda_c \ll 1$ ならば、気泡群に加えられる波動は、気泡群周辺で時間のみの関数となり、場所によらず均一な圧力変動を与えることがわかる。そのため、速度ポテンシャル $\varphi$ は一様に変動する圧力場において

$$\varphi = \sum_{I=1}^N \varphi_I + \Phi(t) \quad (3.75)$$

と表すことができる。

式(3.75)を気泡壁での圧力の釣り合いを表す境界条件式(2.7)に代入すると、圧力項で表された気泡の運動方程式が得られるが、ここでは、式(2.124)で示したエンタルピーに関する境界条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla_I \varphi|^2 + h_{Iw} = 0 \quad (3.76)$$

を用いる。なお、式(3.76)の $h_{Iw}$ はTaitの状態方程式(2.118)を用いると次のように表現される。

$$h_{Iw}(t) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_\infty + B}{\rho_\infty} \left\{ \left( \frac{p_{Iw}(t) + B}{p_\infty + B} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\} \quad (3.77)$$

ここで、 $p_{Iw}(t)$ は気泡壁圧力を表しており、式(2.126)で与えられる。

### 3.5.2 N個の球形気泡の運動方程式

式(3.75)を式(3.76)に代入すると以下の式を得る。

$$\left[ \frac{\tilde{F}'_{I0}}{R_{I0}} - \frac{\tilde{F}''_{I0}}{a_\infty} \right]_{r_I=R_{I0}} + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \left[ \frac{\tilde{F}'_{IJ}}{L_{IJ}} \right]_{r_I=L_{IJ}} - \frac{\dot{R}_{I0}^2}{2} - \dot{\Phi} = h_{Iw} \quad (3.78)$$

ここで、 $'$ は $\zeta_{I-}$ に関する微分を表している。式(3.78)より、相互作用および圧縮性に関する項を無視すると、

$$\tilde{F}'_{I0}|_{r_I=R_{I0}} = \frac{1}{2} (R_{I0} \dot{R}_{I0}^2) + R_{I0} (h_{Iw} + \dot{\Phi}) \quad (3.79)$$

$$\tilde{F}''_{I0}|_{r_I=R_{I0}} = \frac{1}{2} (2 R_{I0} \dot{R}_{I0} \ddot{R}_{I0} + \dot{R}_{I0}^3) + \dot{R}_{I0} (h_{Iw} + \dot{\Phi}) + R_{I0} (\dot{h}_{Iw} + \ddot{\Phi}) \quad (3.80)$$

なる関係が得られる。式(3.79)に式(3.68)を代入すると

$$R_{I0}^2 \ddot{R}_{I0} + \frac{3}{2} R_{I0} \dot{R}_{I0}^2 = R_{I0} h_{Iw} + R_{I0} \dot{\Phi} \quad (3.81)$$

が得られる。式(3.81)は、 $h_{Iw}$ を式(2.127)のように近似するとRayleigh-Plessetの式<sup>(9)</sup>に帰着する。式(3.81)の両辺に $\Lambda \dot{R}_{I0}/R_{I0}$  ( $\Lambda: O(1)$ の任意定数)をかけて、変形すると次式の関係が得られる。



$$0 = \Lambda R_{I0} \dot{R}_{I0} \ddot{R}_{I0} + \frac{3}{2} \Lambda \dot{R}_{I0}^3 - \Lambda \dot{R}_{I0} (h_{Iw} + \dot{\Phi}) \quad (3.82)$$

ここで、式(3.80)と式(3.82)の辺々を加えると

$$\begin{aligned} \ddot{F}_{I0}|_{r_I=R_{I0}} &= (\Lambda + 1) R_{I0} \dot{R}_{I0} \ddot{R}_{I0} + \left(\frac{3}{2}\Lambda + \frac{1}{2}\right) \dot{R}_{I0}^3 \\ &+ (1 - \Lambda) \dot{R}_{I0} (h_{Iw} + \dot{\Phi}) + R_{I0} (\dot{h}_{Iw} + \ddot{\Phi}) \end{aligned} \quad (3.83)$$

を得る。式(3.68),(3.83)を式(3.78)に代入すると、以下に示す気泡群の運動方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\left\{1 - (\Lambda + 1) \frac{\dot{R}_{I0}(t)}{a_\infty}\right\} R_{I0}(t) \ddot{R}_{I0}(t) + \frac{3}{2} \left\{1 - \left(\Lambda + \frac{1}{3}\right) \frac{\dot{R}_{I0}(t)}{a_\infty}\right\} \dot{R}_{I0}^2(t) \\ &\sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{R_{J0}(\zeta_{JI})}{L_{IJ}} \left\{ R_{J0}(\zeta_{JI}) \ddot{R}_{J0}(\zeta_{JI}) + 2 \dot{R}_{J0}^2(\zeta_{JI}) \right\} \\ &= \left\{1 + (1 - \Lambda) \frac{\dot{R}_{I0}(t)}{a_\infty}\right\} \{h_{Iw}(t) + \dot{\Phi}(t)\} \\ &+ \frac{R_{I0}(t)}{a_\infty} \{\dot{h}_{Iw}(t) + \ddot{\Phi}(t)\} \end{aligned} \quad (3.84)$$

ここで、

$$\zeta_{JI} = t - \frac{L_{JI} - R_{J0}(\zeta_{JI})}{a_\infty} \quad (3.85)$$

式(3.84)は、 $N=2$ ,  $\Lambda=1$ として $h_{Iw}(t)$ および $\dot{h}_{Iw}(t)$ を式(2.127)のように近似すると、式(2.140)において変動圧力場を考慮した場合の式に帰着する。また、 $L_{IJ} \rightarrow \infty$ とすると、Prosperettiらによる単一球形気泡の運動方程式<sup>(18),(19)</sup>に帰着し、さらに、そのエンタルピー項を圧力項で書き直すと、 $\Lambda=0$ のときにKellerの式<sup>(20)</sup>が得られる。 $a_\infty \rightarrow \infty$ の場合には、前節までに示した非圧縮性液体中の運動方程式(3.34)に帰着する。したがって、圧縮性を無視した場合の変動圧力場における気泡群の運動方程式は、式(3.34)の $p_\infty$ を $p_\infty - \rho \dot{\Phi}$ に置き換えた式で与えられることがわかる。

### 3.6 結 言

本章では、第2章で得られた2個の気泡の運動方程式を拡張し、液体中の任意の位置に分布している $N$ 個の気泡の運動方程式を導出した。まず最初に、気泡間の相互作用に起因する気泡の3次元並進運動・変形、および並進運動が気泡変形に及ぼす効果を考慮した非圧縮性・非粘性流体中での気泡群の運動方程式が導出された。次に、気泡群の球形モードの運動方程式を線形化することにより気泡群の特性方程式が導かれた。その結果、気泡群の最低次の固有振動数は単一気泡の場合に比べて低くなり、その傾向は気泡間の相互作用が強くなるほど助長されることが明らかとなった。さらに、Lagrangeの運動方程式において、粘性によるエネルギー消散率をポテンシャル理論によって見積ることにより、上記運動方程式に、液体の粘性の影響を気泡の並進運動および変形に関して一次のオーダーまで考慮した。最後に、圧力場の時間変動を考慮した圧縮性流体中での球形気泡群の運動方程式が導出された。以上の運動方程式は、特別な場合として第2章で示した2個の気泡の運動方程式と一致することが確認された。



- (1) Omta, R., *J. Acoust. Soc. Am.*, **82**(1987), 1018.
- (2) d'Agostino, L., and Brennen, C. E., *J. Fluid Mech.*, **199** (1989), 155.
- (3) Chahine, G. L., *Proc. IAHR Symp. on Operating Problems of Pump Stations and Power Plants*, Amsterdam, **2-1**(1982), 1.
- (4) Chahine, G. L., *Proc. 14th Symp. on Naval Hydrodynamics*, Ann Arbor, Michigan, (1983), 165, National Academy Press.
- (5) Chahine, G. L., and Liu, H. L., *J. Fluid Mech.*, **156**(1985), 257.
- (6) Hermans, J., *Ph.D Thesis*(Technical University of Eindhoven), (1973).
- (7) Hobson, E. W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, (1931), Cambridge Univ. Press.
- (8) Shima, A., *J. Basic Eng.*, **93**(1971), 426.
- (9) Plesset, M. S., *J. Appl. Mech.*, **16**(1949), 277.
- (10) Plesset, M. S., *J. Appl. Phys.*, **25**(1954), 96.
- (11) Plesset, M. S., and Prosperetti, A., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **9**(1977), 145.
- (12) 藤原・島, 機構論, **894-2**(1989), 61.
- (13) Foody, B. E., and Huber, P. W., *J. Appl. Mech.*, **48**(1981), 727.
- (14) Batchelor, G. K., *Introduction to Fluid Dynamics*, (1967), Cambridge Univ. Press.
- (15) Prosperetti, A. and Seminara, G., *Phys. Fluids*, **21**(1978), 1465.
- (16) Herring, C., *Columbia Univ. NDRC Rep.*, C-4-sr10-010(1941).
- (17) Trilling, L., *J. Appl. Phys.*, **23**(1952), 14.
- (18) Prosperetti, A., and Lezzi, A., *J. Fluid Mech.*, **168**(1986), 457.
- (19) Lezzi, A., and Prosperetti, A., *J. Fluid Mech.*, **185**(1987), 289.
- (20) Keller, J. B., and Miksis, M., *J. Acoust. Soc. Am.*, **68**(1980), 628.

## 4.1 緒言

第3章では、球面調和関数を用いて、非圧縮・非粘性流体中での2個ならびに一般に $N$ 個の非球形気泡の運動方程式を導出した。得られた運動方程式は、気泡間の相互作用に起因する気泡の並進運動および変形を含んでいるが、解析は気泡周囲の代表長さを $R_{Ic}$ 、気泡 $I$ および $J$ の初期中心間距離を $L_{IJ0}$ とするとき $O((R_{Ic}/L_{IJ0})^5)$ の精度で打ち切られており、変形量の二乗以上の高次の項は考慮されていない。原理的にはそれ以上のオーダーの微小量まで考慮することは可能であるが、方程式が非常に複雑になりすぎ、解析的な手法を採用する利点に乏しくなる。そこで、本章では数値解析的に気泡の変形を取り扱う手法について考える。

数値解析的な手法としては、差分法をはじめ様々な方法が提案されているが、気泡の崩壊問題のように、境界が大きく変形し、その体積も非常に大きく変化する問題では、自由境界を精度よく扱うことが重要となる。Plessetら<sup>(1)</sup>は、気泡周囲の非圧縮・非粘性流体に対して差分法を適用し、初めて気泡の大変形を解析し、マイクロジェットの速度を見積った。後に彼らの計算結果は、Lauterbornら<sup>(2)</sup>の実験とよく一致することが確認された。そのほかに、差分法的な考え方を用いて自由境界を扱う方法としては、MAC法<sup>(3)</sup>、ALE法<sup>(4)</sup>、VOF法<sup>(5)</sup>などが挙げられる。MAC法およびVOF法は非圧縮・粘性流体の解析には有効であるが、気泡内気体の圧縮性を扱うことが難しく、ALE法は気相および液相の圧縮性を取り扱えるが、現状では大変形を扱うことが困難である。また、一般に差分法は全空間を差分格子に分割する必要があるため、気泡と剛体壁などの境界の分割方法が精度を左右し、格子の分割方法はかなり経験的な側面を有する。

一方、ポテンシャル問題の数値解法としては境界要素法<sup>(6)~(8)</sup>が挙げられる。境界要素法はGreenの定理を用いて、空間積分を表面積分に変換するため、要素の分割が差分法に比べて容易になり、少ない分割数で精度よく計算が行え、



計算時間も短縮されるという利点がある。しかし、自由境界問題の圧縮性および気泡内部の流動を扱うことは困難であるなどの欠点もある。

このように各々の計算方法で長所、短所はあるが、本研究では、任意形状の壁面近傍の気泡の崩壊問題を扱うことを主眼とし、その目的に最も適した、境界要素法を用いて解析を行う。本章では、境界要素法に用いる境界積分方程式の定式化および計算方法について述べる。

## 4.2 基礎方程式

図4.1に示すように最初、 $z$ を対称軸とする軸対称剛体壁近傍に軸対称な気泡が平衡を保っている状態を考える。ある瞬間に気泡周囲の液体圧力が一様に変化するときの崩壊問題を取り扱う。用いる仮定は2.2節と同様とし、非圧縮・非粘性流体中での気泡の挙動を境界要素法を用いて定式化する。このとき、剛体壁の $z$ 軸との交点 $C$ を原点とする円柱座標系 $(r, \psi, z)$ を用いると、周囲液体は

$$\Delta\varphi = 0 \quad (4.1)$$

を満足する。気泡表面を $S_b$ 、剛体壁を $S_w$ 、無限遠方を $S_\infty$ とし、原点 $C$ から測った液体中の任意の位置ベクトルを $\vec{Q}$ とすると、境界条件は

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{\rho}(p_\infty - p_b + 2\sigma H), \quad \text{on } S_b \quad (4.2)$$

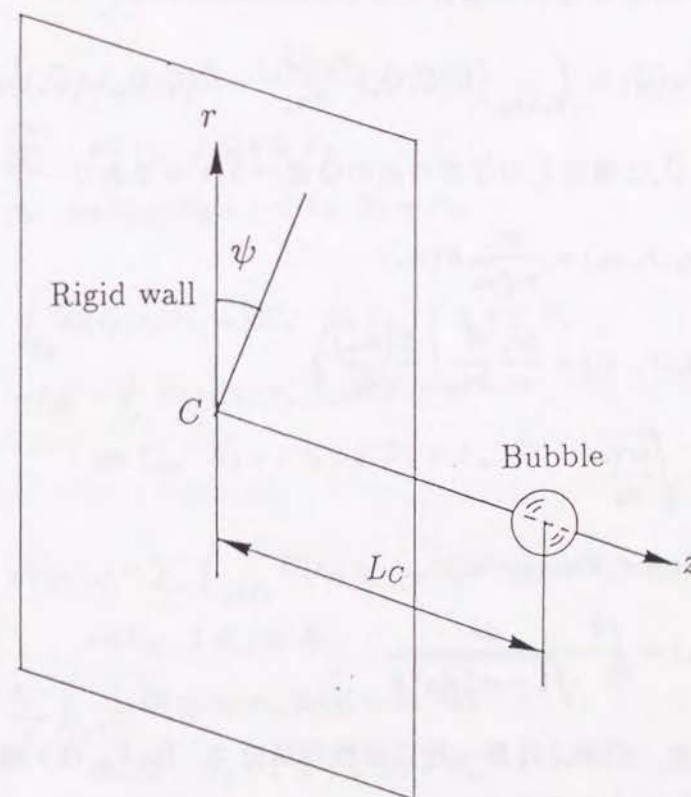


図4.1 座標系



$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \nabla\varphi, \quad \text{on } S_b \quad (4.3)$$

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \text{on } S_\infty \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \text{on } S_w \quad (4.5)$$

となる。ここで、 $\partial/\partial n$  は液体に対して外向きを正とする法線方向の微分を表している。

式(4.1)をGreenの公式を用いて変形すると、次の積分方程式を得る。

$$\tilde{\Theta}(\vec{Q})\varphi(\vec{Q}) = \int_{S_b+S_w} \left\{ \frac{1}{|\vec{Q}-\vec{Q}_*|} \frac{\partial\varphi(\vec{Q}_*)}{\partial n_*} - \varphi(\vec{Q}_*) \frac{\partial}{\partial n_*} \left( \frac{1}{|\vec{Q}-\vec{Q}_*|} \right) \right\} dS_* \quad (4.6)$$

ここで、 $\tilde{\Theta}$ は節点(関数値を代表させる点)での立体角を表す。軸対称問題の場合には式(4.6)を $\psi$ 方向に積分すると次式が得られる。

$$\frac{\tilde{\Theta}(\vec{Q})}{2\pi} \varphi(\vec{Q}) = \int_{\Gamma_b+\Gamma_w} \left\{ \tilde{G}(\vec{Q}; \vec{Q}_*) \frac{\partial\varphi(\vec{Q}_*)}{\partial n_*} - \hat{G}(\vec{Q}; \vec{Q}_*) \varphi(\vec{Q}_*) \right\} d\Gamma_* \quad (4.7)$$

ここで、 $\vec{Q}, \vec{Q}_*$ は境界上の任意の点の位置ベクトルであり

$$\tilde{G}(r, z; r_*, z_*) = \frac{2r_*}{\pi\sqrt{d_*}} K(m_*)$$

$$\hat{G}(r, z; r_*, z_*) = \frac{2r_*}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_*} \left( \frac{K(m_*)}{\sqrt{d_*}} \right)$$

$$m_* = \sqrt{\frac{4rr_*}{d_*}}$$

$$d_* = (r+r_*)^2 + (z-z_*)^2$$

$$K(m_*) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m_*^2 \sin^2 \theta}}$$

である。なお、 $K(m_*)$ は第一種完全楕円積分で、 $\Gamma_b, \Gamma_w$ は $z$ 軸を通る半平面における $S_b, S_w$ の切口である。

### 4.3 計算方法

式(4.7)の境界積分方程式を解くために、剛体壁および気泡表面をそれぞれ $N_w$ 個および $N_b$ 個の境界要素に分割する。境界要素としては、一定要素を用いる。

#### 4.3.1 境界積分方程式の離散化

一定要素の場合には節点は離散化された要素の中央にあり、速度ポテンシャルは要素内で一定であるとする。このため、 $\tilde{\Theta} = 2\pi$ を考慮して式(4.7)の離散化を行うと以下の連立方程式を得る。

$$\sum_k \tilde{A}_{jk} \tilde{U}_k = \tilde{B}_j, \quad 1 \leq j \leq N_b + N_w, \quad 1 \leq k \leq N_b + N_w \quad (4.8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k &= \frac{\partial\varphi_k}{\partial n_*} \quad \text{on } \Gamma_b, \quad 1 \leq k \leq N_b \\ &= \varphi_k \quad \text{on } \Gamma_w, \quad N_b + 1 \leq k \leq N_b + N_w \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{jk} &= \int_{\Gamma_k} \tilde{G}(r_j, z_j; r_*, z_*) d\Gamma_* \quad \text{on } \Gamma_b, \quad 1 \leq k \leq N_b \\ &= -\delta_{jk} - \int_{\Gamma_k} \hat{G}(r_j, z_j; r_*, z_*) d\Gamma_* \\ &\quad \text{on } \Gamma_w, \quad N_b + 1 \leq k \leq N_b + N_w \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_j &= \varphi(r_j, z_j) + \sum_k \int_{\Gamma_k \in \Gamma_b} \hat{G}(r_j, z_j; r_*, z_*) \varphi(r_*, z_*) d\Gamma_* \\ &\quad \text{on } \Gamma_b, \quad 1 \leq j \leq N_b \\ &= \sum_k \int_{\Gamma_k \in \Gamma_b} \hat{G}(r_j, z_j; r_*, z_*) \varphi(r_*, z_*) d\Gamma_* \\ &\quad \text{on } \Gamma_w, \quad N_b + 1 \leq j \leq N_b + N_w \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\delta_{jk}$ はクロネッカーのデルタである。



なお、式(4.8)において節点を含む弦上で積分を行う際には、 $\tilde{G}$  および  $\hat{G}$  の特異性を考慮する必要がある。ここで、式(4.8)の  $\hat{G}$  は、 $n_{r*}$  および  $n_{z*}$  をそれぞれ法線ベクトルの  $r$  および  $z$  成分と定義すると、次のように変形される。

$$\begin{aligned}\hat{G} &= \frac{2r_*}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_*} \left\{ \frac{K(m_*)}{\sqrt{d_*}} \right\} \\ &= \frac{n_{r*}}{\pi \sqrt{d_*}} \left\{ \frac{(r+r_*)(r-r_*) + (z-z_*)^2}{(r-r_*)^2 + (z-z_*)^2} E(m_*) - K(m_*) \right\} \\ &\quad + n_{z*} \frac{2(z-z_*)r_*}{\pi d_* \sqrt{d_*}} \frac{E(m_*)}{1-m_*^2}\end{aligned}\quad (4.12)$$

ここで、 $E(m_*)$  は第二種完全楕円積分を表しており、次のように与えられる。

$$E(m_*) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m_*^2 \sin^2 \theta} \quad (4.13)$$

式(4.12)は  $(r, z)$  と  $(r_*, z_*)$  が同一弦上にある場合には、さらに以下のように変形される。

$$\hat{G} = \frac{n_{r*}}{\pi \sqrt{d_*}} \{ E(m_*) - K(m_*) \} \quad (4.14)$$

したがって、 $\tilde{G}$  および  $\hat{G}$  の特異性はともに第一種完全楕円積分の特異性に一致することがわかる。本計算においては、節点を含む弦上で、 $K(m_*)$  を

$$K(m_*) = \sum_{s=0}^{10} \tilde{c}_{1s} \tilde{\eta}^s + \sum_{s=0}^{10} \tilde{c}_{2s} \tilde{\eta}^s \ln \frac{1}{\tilde{\eta}}, \quad \tilde{\eta} = 1 - m_*^2 \quad (4.15)$$

と近似し<sup>(9)</sup>、Gauss の対数積分公式<sup>(10)</sup>を用いることにより、式(4.15)の対数特異性を有する項の積分を行った。また、式(4.14)、(4.15)の特異性のない項および節点を含まない弦上での積分では、Gauss の積分公式<sup>(10)</sup>を用いた。

#### 4.3.2 境界条件の離散化

時間積分は気泡表面に対してのみ行うので、式(4.2)、(4.3)は気泡表面においてのみ離散化される。本計算では気泡表面での要素  $k-1$  と要素  $k$  との交点  $Q_k$  で速度を評価し、時間積分を行う。

図4.2に示すように要素の交点  $Q_k$  における法線速度を  $v_{nk}$ 、接線速度を  $v_{tk}$ 、平均曲率を  $H_k$  と定義すると、式(4.2)は点  $Q_k$  において

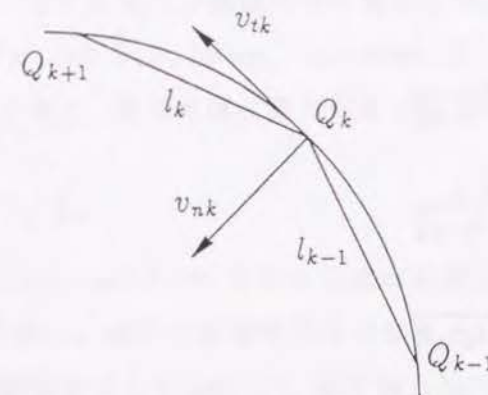


図4.2 離散化

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{1}{2}(v_{nk}^2 + v_{tk}^2) + \frac{1}{\rho}(p_\infty - p_b + 2\sigma H_k) \quad (4.16)$$

と表現される。また、式(4.3)を  $r$  方向および  $z$  方向に分解すると以下の式を得る。

$$\frac{dr_k}{dt} = v_{nk} n_{rk} - v_{tk} n_{zk} \quad (4.17)$$

$$\frac{dz_k}{dt} = v_{nk} n_{zk} + v_{tk} n_{rk} \quad (4.18)$$

ここで、 $n_{rk}, n_{zk}$  は要素の交点での法線ベクトルの  $r$  方向および  $z$  方向成分を表している。

要素の交点  $Q_k$  での  $v_{nk}, v_{tk}$  および法線ベクトルの方向は次のように決定される。まず、法線速度  $v_{nk}$  を、式(4.8)より得られる要素  $k-1$  と要素  $k$  の節点における法線速度を用いて

$$v_{nk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial n_*} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial n_*} \right) \quad (4.19)$$

と近似する。次に、点  $Q_k$  における接線方向速度  $v_{tk}$  を、点  $Q_{k-1}, Q_k$  間の距離を  $l_{k-1}$ 、点  $Q_k, Q_{k+1}$  間の距離を  $l_k$ 、点  $Q_{k-1}, Q_k, Q_{k+1}$  における速度ポテンシャルの値を  $\varphi_{k-1}, \varphi_k, \varphi_{k+1}$  とするとき以下の式で近似する<sup>(11)</sup>。



$$v_{tk} = \tilde{\beta}_1 \varphi_{k+1} + \tilde{\beta}_2 \varphi_k - \tilde{\beta}_3 \varphi_{k-1} \quad (4.20)$$

ここで,

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{l_{k-1}^2}{l_k l_{k-1}^2 + l_{k-1} l_k^2}$$

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{l_k^2 - l_{k-1}^2}{l_k l_{k-1}^2 + l_{k-1} l_k^2}$$

$$\tilde{\beta}_3 = \frac{l_k^2}{l_k l_{k-1}^2 + l_{k-1} l_k^2}$$

最後に、気泡表面上の点  $Q_k$  における法線ベクトルならびに速度の方向は、点  $Q_{k-1}, Q_k, Q_{k+1}$  を円で補間することにより決定する。

平均曲率  $H$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\nabla \vec{n}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial n_r}{\partial r} + \frac{n_r}{r} + \frac{\partial n_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

ここで、 $-(\partial n_r / \partial r) - (\partial n_z / \partial z)$  は  $r-z$  面内での曲率であるから、これを  $H_*$  とすると、点  $Q_k$  での曲率  $H_k$  は、以下の式から計算される。

$$H_k = \frac{1}{2} \left( H_{*k} - \frac{n_{rk}}{r_k} \right) \quad (4.22)$$

ここで、 $H_{*k}$  は点  $Q_k$  での  $H_*$  を表しており、曲率  $H_{*k}$  は点  $Q_{k-1}, Q_k, Q_{k+1}$  で作られる円の半径の逆数をとることにより得られる。

なお、式(4.16)~(4.18)の時間積分には代表的な連立常微分方程式の解法の一つである Adams 法<sup>(12)</sup>(京都大学大型計算機センターの FACOM SSL II ライブラリー)を用いた。

#### 4.4 計算精度の検討

無限空間内での単一球形蒸気泡の崩壊問題を数値計算し、精度の検討を行った。なお、この問題は  $p_{I90}=0, \sigma=0, \Delta p=p_\infty-p_v=\text{const.}, L \rightarrow \infty$  のもとで式(2.18)を解くことに対応しており、気泡半径が零になるときの気泡の崩壊時間  $T_l$  は

$$T_l = 0.91468 R_{I00} \sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}} \quad (4.23)$$

で与えられる<sup>(13)</sup>。式(4.23)の 0.91468 を無次元崩壊時間と呼ぶ。

気泡表面  $\Gamma_b$  を 32 分割し、無次元崩壊時間を比較した。一定要素を用いた本計算における無次元崩壊時間は 0.91457 で、解析解と約 0.01 % の誤差であった。このときの無次元収縮速度 ( $\sqrt{\Delta p / \rho}$  で無次元化) の平均値は約 59800 で、最大速度および最小速度とそれぞれ 1.6 % および 4.5 % の誤差であった。以上の結果より、本計算方法は 32 分割と比較的少ない分割数の場合にも、解析に必要な十分な精度があることが確認された。そこで、後述する境界要素法を用いた解析においては、気泡 1 個につき要素の分割数を 32 分割とした。

#### 4.5 結 言

本章では、境界要素法を用いて、非圧縮性・非粘性流体中での気泡の軸対称運動を解析するための定式化を行った。本計算手法を単一球形蒸気泡の崩壊問題に適用したところ、理論解析結果と比較して十分な精度が得られることが示された。



- (1) Plesset, M S., and Chapman, R. B., *J. Fluid Mech.*, 47(1971), 283.
- (2) Lauterborn, W., and Bolle, H., *J. Fluid Mech.*, 72(1975), 391.
- (3) Nichols, B. D., and Hirt, C. W., *J. Comp. Phys.*, 8(1971), 434.
- (4) Hirt, C. W., et al., *J. Comp. Phys.*, 14(1974), 227.
- (5) Hirt, C. W., and Nichols, B. D., *J. Comp. Phys.*, 39(1981), 201.
- (6) Guerri, L., et al., *Proc. 2nd Int. Colloq. on Drops and Bubbles*, (1982), 175.
- (7) Blake, et al., *J. Fluid Mech.*, 170(1986), 479.
- (8) Blake, et al., *J. Fluid Mech.*, 181(1987), 197.
- (9) Hart, J. F., et al., *Computer Approximations*, (1968), John Wiley & Sons.
- (10) Stroud, A. H., and Secrest, D., *Gaussian Quadrature Formulas*, (1966), Prentice-Hall.
- (11) Sugino, R., and Tosaka, N., *Int. Symp. on Comp. Fluids Dynamics*, Nagoya, (1989), 1120.
- (12) Shampine, L. F., and Gordon, M. K., *Computer Solution of Ordinary Differential Equations*, (1975), Freeman.
- (13) Rayleigh, Lord, *Phil. Mag.*, 34(1917), 94.

## 5.1 緒言

本章では、第2~4章で得られた気泡群の運動方程式および境界要素法の関係式を用いて、気泡周囲の液体圧力が初期の平衡圧力からステップ状に上昇あるいは低下するときの気泡の崩壊問題および成長問題を扱う。特に、気泡の崩壊問題は、材料損傷の原因と考えられているマイクロジェットならびに気泡がリバウンドする際に発生する衝撃波の生成機構を解明するための最も基本的な問題である<sup>(1),(2)</sup>。本章ではこうした点を踏まえて、気泡同志の相互作用ならびに剛体壁と気泡との相互作用が、気泡の変形機構ならびに気泡周囲の液体圧力に及ぼす効果を明らかにすることを主眼とする。本章は以下のように構成されている。

5.2節では、第2,3章で得られた気泡群の運動方程式の精度の検討を行う。5.3節では、非圧縮性・非粘性流体中での同じ大きさの2個の非球形気泡の崩壊問題、すなわち、平面剛体壁近傍での単一気泡の崩壊問題を解析し、気泡の変形機構ならびに気泡が剛体壁に及ぼす効果を明らかにする。5.4節では、前節の解析を拡張し、くぼみあるいは突起を有する曲面剛体壁近傍での気泡の崩壊問題を解析し、剛体壁形状が気泡運動に及ぼす効果を把握する。5.5節では、液体の粘性が気泡の挙動、特に変形に及ぼす効果を明らかにする。5.6節では、様々な気泡配置のもとでの気泡群の崩壊問題を解析し、気泡群の運動に及ぼす相互作用の効果を明らかにする。また、 $N$ 個の気泡群の挙動の特別な場合として、角を持つ剛体壁近傍での気泡の運動、平面剛体壁近傍での複数個の気泡の運動を解析する。5.7節では圧縮性液体中での2個の球形気泡の運動方程式を用いて、液体の圧縮性が気泡間の相互作用に及ぼす効果を明らかにする。

以下に示す解析では、特に断わらない限り、表5.1に示す物理定数を用い、以下の初期条件のもとで計算を行う。

$$R_{I0}(0) = R_{I00}$$

$$b_{Im}(0) = 0, \quad -1 \leq m \leq 1$$



$$\begin{aligned}
R_{Inm}(0) &= 0, \quad n \geq 2, \quad -n \leq m \leq n \\
\dot{R}_{I0}(0) &= 0 \\
v_{Im}(0) &= 0, \quad -1 \leq m \leq 1 \\
\dot{R}_{Inm}(0) &= 0, \quad n \geq 2, \quad -n \leq m \leq n
\end{aligned} \quad (5.1)$$

また、結果は主に以下に示す無次元量を用いて整理する。

$$\begin{aligned}
t^* &= t\sqrt{p_0/\rho}/R_c, \quad R_I^* = R_I/R_{I00}, \quad R_{I0}^* = R_{I0}/R_{I00}, \quad b_{Im}^* = b_{Im}/R_{I00}, \\
R_{Inm}^* &= R_{Inm}/R_{I00}, \quad L_{IJ}^* = L_{IJ}/R_c, \quad p^* = p/p_0, \quad \nu^* = \nu/(R_c\sqrt{p_0/\rho}), \\
\sigma^* &= \sigma/(R_cp_0)
\end{aligned} \quad (5.2)$$

ここで、蒸気泡 ( $p_{I90}=0$ ) の場合には、 $p_0=p_\infty-p_v(=\text{const.})$ 、ガス気泡の場合には、 $p_0=p_\infty$  とする。 $R_c$  としては、気泡群を構成する個々の気泡の初期半径 ( $R_{I00}$ ) のなかで最大のものを用いる。特に断わらない限り、その他の長さの次元を持つ量は  $R_c$  で、速度の次元を持つ量は  $\sqrt{p_0/\rho}$  で、圧力の次元を持つ量は  $p_0$  で無次元化する。なお、圧縮性を考慮した場合の解析では  $\rho$  として  $\rho_\infty$  を用いる。また、2 個の気泡の場合ならびに剛体壁近傍での単一気泡の場合には、しばしば次の無次元量を用いる。

$$\varepsilon = R_c/L_0, \quad \varepsilon_C = 2R_c/L_0 = R_c/L_C, \quad w = R_{200}/R_{100} \quad (5.3)$$

ここで、 $L_C$  は剛体壁の中心  $C$  から初期気泡中心までの距離を表している。なお、今後は特に断わらない限り、式 (5.2) の “\*” を省略する。

気泡の運動方程式の時間積分には 5.5 節の一部を除いて、Adams 法を用いる。

表 5.1 物理定数

Liquid pressure at infinity ( $p_\infty$ )	101.3 kPa
Saturated vapor pressure of water ( $p_v$ )	2.337 kPa(at 20 °C)
Polytropic index of noncondensable gas ( $\gamma$ )	1.4
Viscosity of water ( $\mu$ )	$1.002 \times 10^{-3}$ Pa·s
Density of water ( $\rho$ )	998.2 kg/m <sup>3</sup>
Surface tension ( $\sigma$ )	$7.275 \times 10^{-2}$ N/m

## 5.2 精度の検討

本節では平面剛体壁近傍での蒸気泡の成長・崩壊問題を取り上げ、境界要素法との比較をもとに、気泡の運動方程式の精度について検討する。なお、本節で扱った気泡の挙動は、すべて鏡像の原理を用いることにより複数個の気泡の問題として処理されており、表面張力および粘性の効果は無視されている。

### 5.2.1 2 個の気泡の理論

図 5.1 および図 5.2 は平面剛体壁近傍での単一蒸気泡 ( $p_{I90}=0$ ) の崩壊の様子である。図 5.1 の左半分は、 $O(\varepsilon_I^6)$  以上の項をすべて無視した場合の運動方程式 (2.72)~(2.76) を用いたときの結果を表している。したがって、Legendre 関数は  $n=4$  まで考慮されている。図 5.1 の右半分は Guerri ら<sup>(3)</sup> による境界要素法の結果である。剛体壁の中心  $C$  と初期気泡中心との距離  $L_C$  は  $L_C=1.5$  としている。図 5.2 の右半分は図 5.1 の左半分と同一であり、左半分は式 (2.63)~(2.65) の運動方程式に

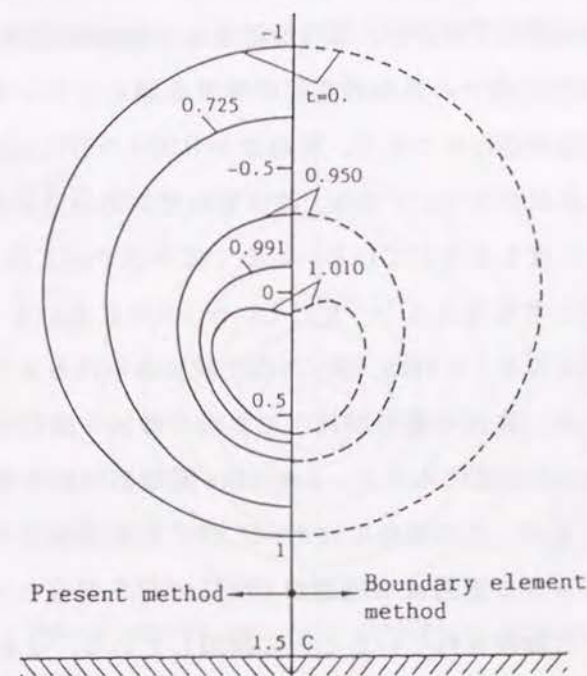


図 5.1 境界要素法との比較



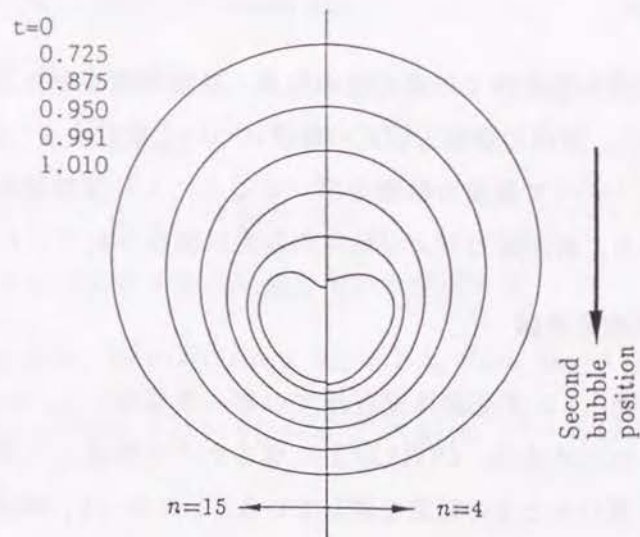


図 5.2 Legendre 関数の項数の影響

において, Legendre 関数を  $n=15$  まで考慮した場合の結果を表している.

図 5.1 の両者を比較してみると, 本理論結果は Legendre 関数の項数が  $n=4$  と少ない場合にも剛体壁近傍での気泡の変形の特徴を捕らえていることがわかる. すなわち, 気泡の収縮が進むにつれて, 気泡は  $t=0.950$  の形状に示されるように, 対称軸方向に伸びた形状になり, その後, 剛体壁の反対側の気泡壁 ( $\theta_I \approx 180^\circ$ ) に不安定が生じ, そこにくぼみを生じている. このくぼみはやがて液体マイクロジェット形成に至るものと考えられる<sup>(4)</sup>. ただし,  $t=1.010$  においては特に  $\theta_I \approx 45^\circ, 135^\circ$  の形状に差異が見られる. これは, 図 5.2 の比較にみられるように, Legendre 関数の項数が少ないため, 高次の変形が及ぼす気泡の微妙な変形を表現できないことによる. 次に, 図 5.2 を見てみると, Legendre 関数の項数を増やすと全体に気泡形状は滑らかになるが, この場合には  $\theta_I = 0^\circ, 180^\circ$  の変形を若干大きめに評価していることがわかる. この原因は本理論が  $O(\varepsilon_I^5)$  で打ち切られており, 変形量の二乗以上の高次の項が無視されていることに起因している. なお, 2.4.2 節で述べたように, 本理論は Chahine<sup>(5)</sup>らの特異摂動法による解析と異なり, 球形モードの運動方程式を  $\varepsilon_I$  に関して分離していないため, 蒸気泡の崩壊問題においても, 単一

球形気泡の無次元崩壊時間<sup>(6)</sup>  $t=0.9147$  以降の気泡の挙動を扱えることがわかる.

図 5.3 は  $L_0=2.5$  のときの気泡の崩壊の様子を表しており, 左半分は式 (2.63)~(2.65) の第二次近似の結果を, 右半分は式 (2.34)~(2.36) の第一次近似の結果, すなわち, 気泡の並進運動が変形モードに及ぼす効果は無視した場合の結果を表している. Legendre 関数は  $n=15$  まで考慮している. 図 5.3 からわかるように, 収縮が進み,  $t=0.947$  あたりから両者に違いが現れ, 第一次近似では  $\theta_I \approx 180^\circ$  における気泡壁のくぼみを表現できないことがわかる. これは, 収縮が進み並進移動速度が大きくなると並進運動が変形モード, 特に  $R_{I3}$  成分に大きな影響を与えるためである. 以上のことより第一次近似では, 並進運動が比較的小さな範囲でしか気泡変形を正しく捕らえることができず, 気泡の並進運動が変形に及ぼす効果を考慮することが気泡変形を考える上で重要であることがわかる.

図 5.4 は  $L_0=5$  のときの蒸気泡の成長の様子である. 右半分は図 5.3 と同様に, 第一次近似による結果を, 左半分は第二次近似による結果を表している. ただし, 計算は球形モードの最大半径を  $R_{I\max}$  とするとき,  $R_{I\max}/L_0 \leq 1/3$  の範囲で行っている. 図 5.4 より成長過程においては, 図 5.3 の崩壊過程の結果と異なり, 第一

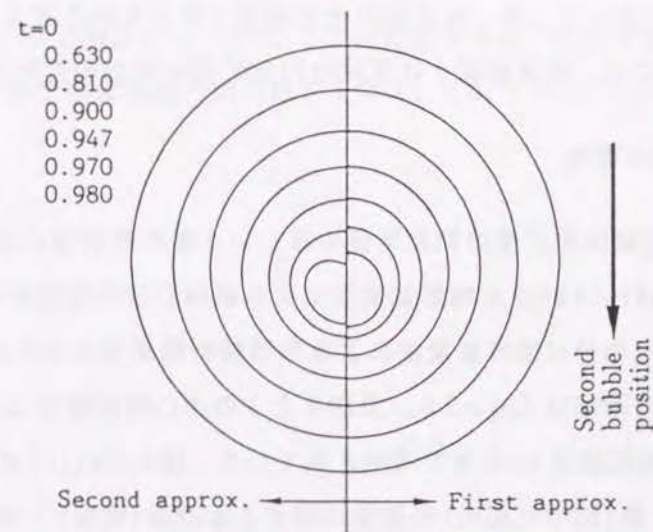


図 5.3 第一次近似と第二次近似との比較 (崩壊過程)



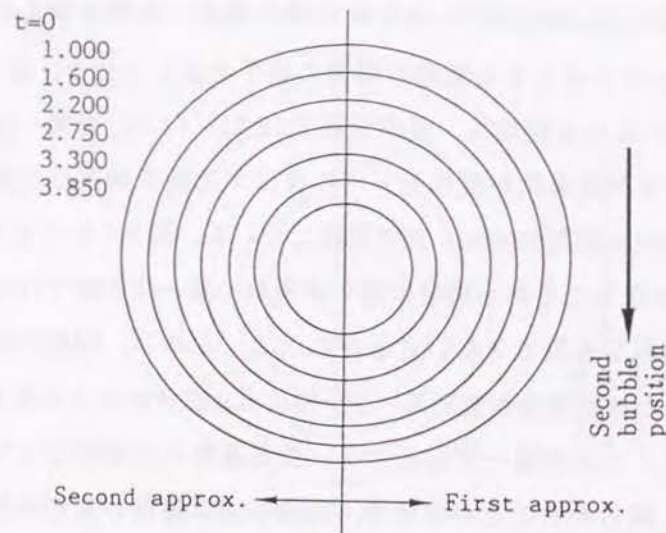


図 5.4 第一次近似と第二次近似との比較 (成長過程)

次近似による結果は第二次近似による結果とよく一致し、気泡の並進運動は気泡変形に大きな影響を及ぼさないことがわかる。この理由は膨張速度が収縮速度に比べて小さいため、崩壊過程の場合ほど気泡の並進移動速度が大きくなることによる。したがって、第一次近似が十分適用できるものと考えられる。なお、成長過程においては、崩壊過程とは反対の  $\theta_I \approx 0^\circ$  側に気泡の変形が見られる。

### 5.2.2 気泡群の理論

図 5.5 に平面剛体壁近傍の初期半径の等しい 2 個の蒸気泡の崩壊問題に関する、本理論 (式 (3.34)~(3.36)) と境界要素法による気泡形状の比較を示す。右半分は本理論結果を、左半分は境界要素法による数値解析結果を示している。剛体壁と気泡 1 の中心との距離は  $L_{C1}=2.5$ 、気泡 1 と 2 の中心間距離は  $L_{12}=5$  としている。なお、球面調和関数は  $n=8$  まで考慮されている。図 5.6(a),(b) に図 5.5 の気泡 1 および 2 の  $N, S$  極 (図中に図示) の速度に関する本理論 (実線) と境界要素法 (一点鎖線) との比較を示す。

図 5.5 より、本理論解析結果は崩壊の最終段階を除いて、境界要素法による結果

とよく一致し、剛体壁近傍での気泡変形の特徴をよく捕らえていることがわかる。すなわち、壁面に近い気泡 1 の形状は、剛体壁と気泡 2 から互いに逆方向に流れ場が誘起されるため、対称軸方向に伸びた形状を示し、気泡 2 は剛体壁方向に並進運動しながら、崩壊の最終段階では剛体壁の反対側がくぼんだ形状になっている。また、気泡の崩壊時間は気泡間の相互作用の影響で単一気泡の無次元崩壊時間 0.9147 より延びている。しかし、本理論結果は気泡変形が進んだ  $t=1.0259$  では、気泡 2 の変形を境界要素法に比べて大きめに評価していることがわかる。この傾向は図 5.1, 5.2 の壁面近傍での単一気泡の崩壊の場合と同様である。本理論と境界要素法との相違は図 5.6 の速度の比較によく現れている。気泡 1 の速度は  $N, S$  極とも実線と一点鎖線はほぼ重なっており、両者はよい一致を示しているのに対して、気泡 2 に関しては、気泡半径が小さくなり、気泡の収縮速度が加速度的に速くなるにつれて両者の差は大きくなっている。こうした両者のずれも、図 5.1, 5.2 の場合と同様に、本理論が  $\varepsilon_{IJ}^5$  のオーダーで打ち切られており、変形量の二乗以上の高次の項が考慮されていないことによるものと考えられる。

以上、本理論は気泡半径が小さくなるにつれて変形を大きめに評価する傾向にあるが、境界要素法など数値解析的な方法と比べて、計算時間が大幅に短縮され (図 5.5 の本理論による計算時間は京都大学大型計算機センターのスカラ計算機 FACOM M-780/30 で数秒のオーダー)、3 次元変形を容易に計算できる利点がある<sup>†</sup>。なお、以下の解析では本理論の適用限界を考え、 $|(R_I - R_{I0})/R_{I0}| \leq 1/3$  の範囲で計算を行う。

<sup>†</sup>境界要素法の場合には、気泡の数を  $N$ 、気泡 1 個あたりの要素の分割数を  $N_s$  とすると、 $[N \cdot N_s] \times [N \cdot N_s]$  の密行列をもつ連立方程式を各時間ステップごとに解かねばならない。一方、理論解析の場合には、球形モードの加速度を得るために、 $N \times N$  の行列をもつ連立方程式を解けばよい。



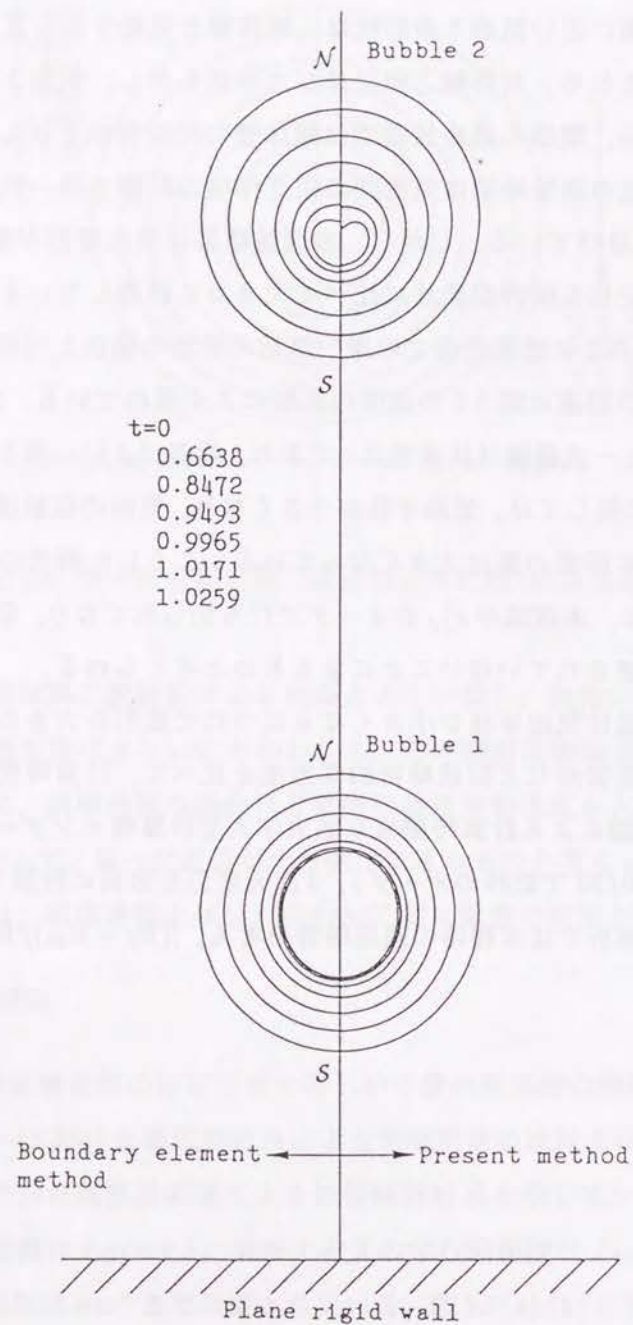


図 5.5 気泡形状の比較

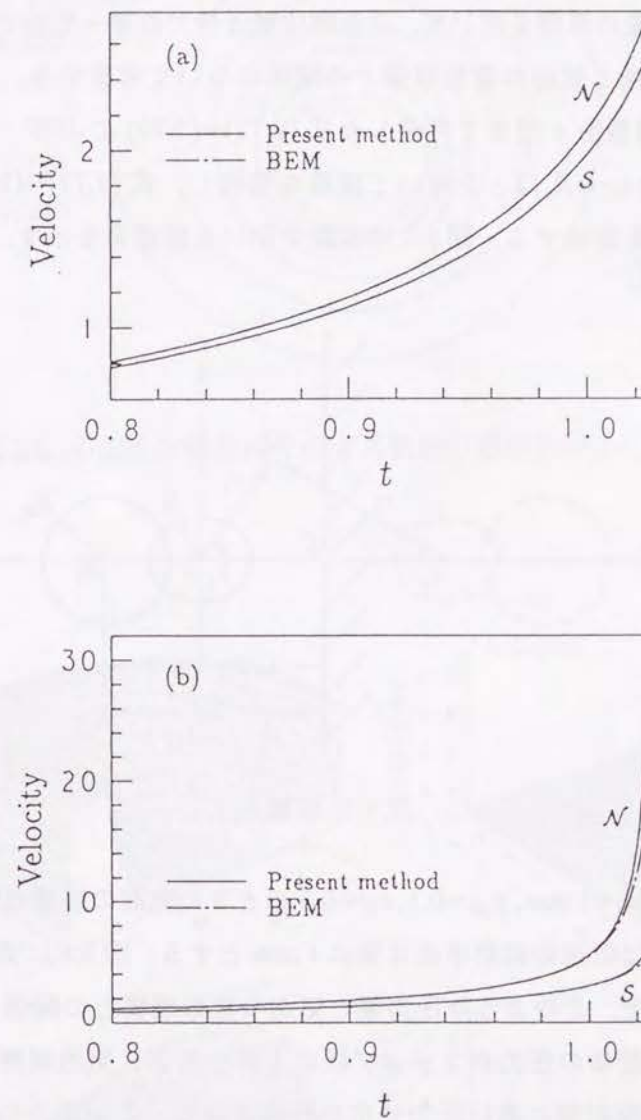


図 5.6 気泡壁速度の比較  
(a) 気泡 1, (b) 気泡 2







現れる変形は  $R_2$  成分で、 $O(\varepsilon^3)$  で剛体壁の影響を受けるため他の変形に先んじて現れる。このため、図 5.8 の  $t=0.800, 0.950$  の時刻に見られるように、わずかに対称軸 ( $z$  軸) 方向に伸びた形状となる。図 5.1 に比べてこの傾向が顕著に現れないのは、 $\varepsilon_C$  が図 5.1 に比べて小さいために剛体壁の影響が小さくなっていることと、非凝縮性気体の影響で気泡の収縮が緩慢になっていることのためである。その後、収縮がしだいに激しくなると、気泡表面の圧力が上昇し、図 5.9 に示すように、気泡周囲の圧力分布に著しい偏りが生じ、 $\theta_1 \approx 180^\circ$  側 (剛体壁の反対側) に高い圧力勾配が発生する。 $t=1.090$  においては  $\theta_1 \approx 180^\circ$  側に高い圧力が発生しているが、 $\theta_1 < 90^\circ$  においては気泡壁面上で圧力が最大になっている。このような圧力分布の偏りは、式 (2.79) における Legendre 関数の  $P_1, P_3$  および  $P_1 \cdot P_2$  成分を含む項によって生じる。このうち気泡がわずかに楕円形になっている状況で最も大きな影響を及ぼすのは、 $O(\varepsilon^2)$  の  $P_1$  成分を含む項と考えられる。いま、液体の圧力分布の式 (2.79) において  $O(\varepsilon^2)$  の  $P_1$  成分を含む項を取り出し、それらの和を  $p_t$  と定義すると

$$p_t = \left\{ -\left( \frac{\dot{q}_1}{r_1^2} + \frac{\dot{q}_0 r_1}{L_0^2} \right) - \frac{v q_0}{r_1^2} - q_0 \left( \frac{2q_1}{r_1^5} - \frac{q_0}{r_1^2 L_0^2} \right) \right\} P_1 \quad (5.4)$$

を得る。 $q_1$  および  $\dot{q}_1$  はそれぞれ  $O(\varepsilon^2)$  の近似では、

$$q_1 = -\frac{R_0^3}{2} \left( v - \frac{q_0}{L_0^2} \right) \quad (5.5)$$

$$\dot{q}_1 = -\frac{R_0^3 \dot{q}_0}{L_0^2} \quad (5.6)$$

と表すことができ、また、気泡がわずかに楕円形になっているときには、 $R_2 > 0$  であるから  $r_1$  は  $\theta_1 \approx 180^\circ$  側で次のように展開できる。

$$r_1 = R_0(1 + \hat{\Delta}), \quad (0 < \hat{\Delta} \ll 1) \quad (5.7)$$

式 (5.5)~(5.7) を式 (5.4) に代入し、式 (2.73) を用いると  $p_t$  は次のように近似される。

$$p_t = -R_0 \dot{v} \hat{\Delta} P_1 \quad (5.8)$$

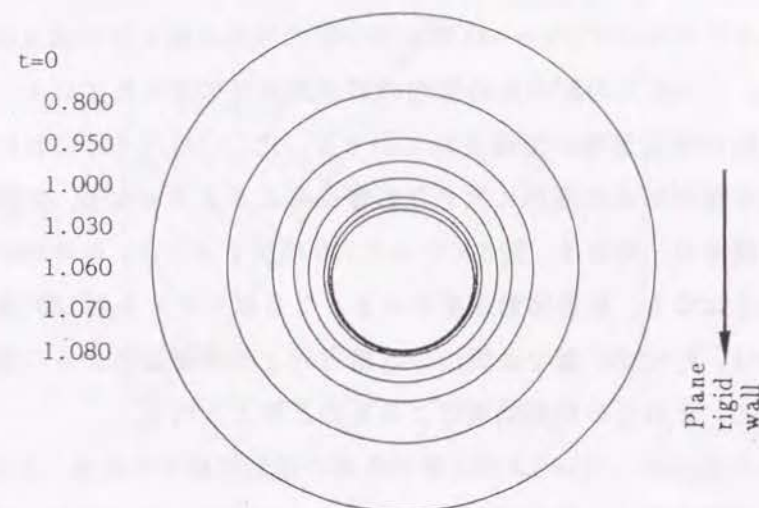


図 5.10 平面剛体壁近傍でのガス気泡の崩壊 ( $\varepsilon_C=0.3, p_{g0}=0.1$ )

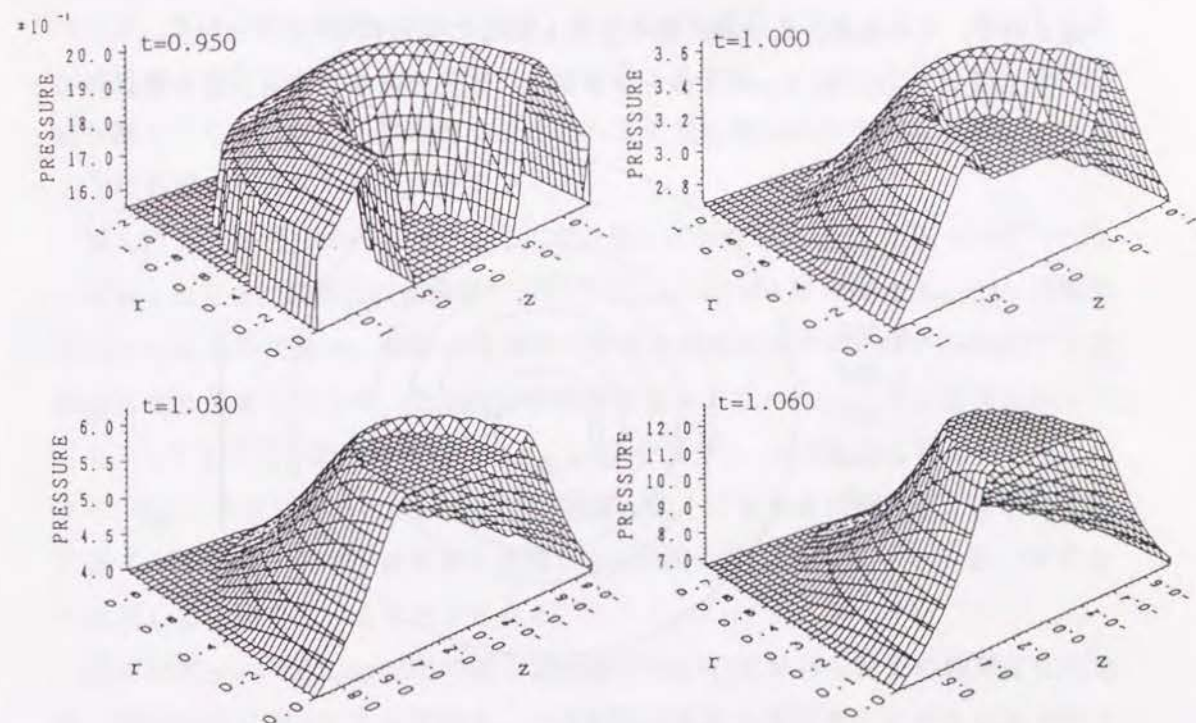


図 5.11 気泡周囲の圧力分布 ( $\varepsilon_C=0.3, p_{g0}=0.1$ )



したがって、 $\dot{v} > 0$  ( $\dot{v}$ : 気泡の並進運動の加速度) のときには、気泡の加速度並進運動によって  $\theta_1 \approx 180^\circ$  ( $P_1 \approx -1$ ) 側に高い圧力分布の偏りが形成されることがわかる。逆に、この圧力勾配のため気泡の並進運動は加速されていくことになる。こうして気泡の並進運動が加速されていくと、式 (2.74), (2.75) における並進運動の影響を含む項が気泡の変形に大きな影響を与えるようになり、初期に形成された変形が助長され、気泡は、図 5.8 の  $t=1.120$  に示すように、 $\theta_1 \approx 180^\circ$  側のくぼみを生じることになる。並進移動速度が大きくなるにつれて  $\theta_1 \approx 180^\circ$  側に変形が助長されるのは、 $\theta_1 \approx 180^\circ$  側では気泡の収縮方向と並進運動による二重わき出しの方向が一致し、それらの相乗効果によるものと考えられる。

図 5.10 は  $p_{g0}=0.1$ ,  $\varepsilon_C=0.3$  のときの気泡の変形の様子である。この場合には、気泡はほぼ球形を保ち、剛体壁の方向にわずかに移動しているだけである。このときの気泡周囲の圧力分布を図 5.11 に示す。気泡周囲の圧力は、図 5.9 の場合と同様に  $\theta_1 \approx 180^\circ$  側で高い圧力勾配を持っているが、 $\varepsilon_C$  が小さいため、このときの圧力勾配は図 5.9 の場合ほど大きくならない。そのため、気泡の並進運動もあまり加速されず、その結果、 $\theta_1 \approx 180^\circ$  側の変形も顕著に見られない。

図 5.12 は  $p_{g0}=0.05$ ,  $\varepsilon_C=0.3$  のときの気泡の変形の様子である。この条件のもと

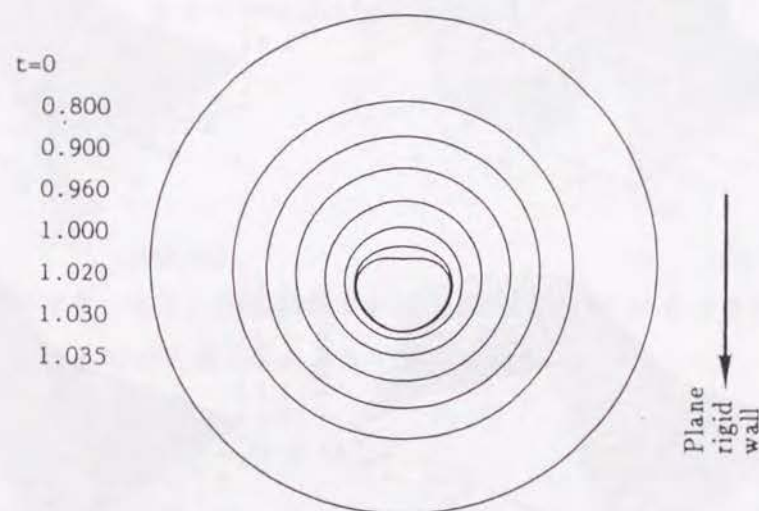


図 5.12 平面剛体壁近傍でのガス気泡の崩壊 ( $\varepsilon_C=0.3$ ,  $p_{g0}=0.05$ )

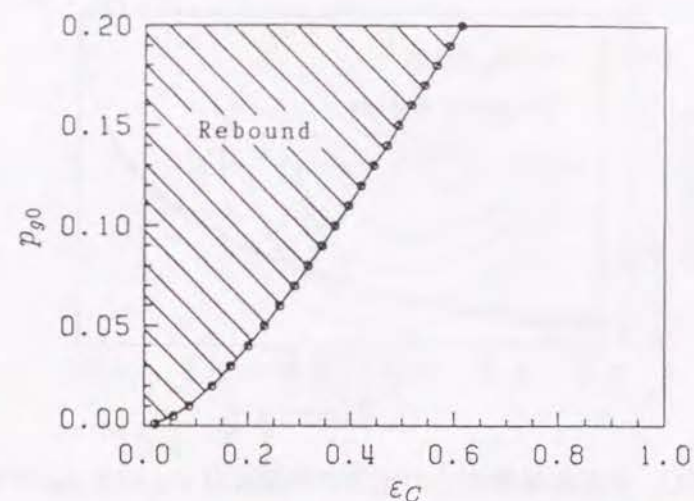


図 5.13 気泡変形に及ぼす  $p_{g0}$  と  $\varepsilon_C$  の影響

では、図 5.10 の場合と比較して  $p_{g0}$  が小さいため気泡の収縮が激しくなり、そのため、 $\varepsilon_C=0.3$  は同じでも鏡像の位置の気泡が誘起する圧力勾配は大きくなる。その結果、気泡の移動速度が大きくなり、それに伴い変形も大きくなる。図 5.8 と比べて気泡の変形がかなり小さくなってから起こるのは、 $\varepsilon_C$  が小さいため、気泡収縮が激しくなり、並進移動速度が加速されるまでは壁は気泡を大きく変形させるような影響を与えないためである。

図 5.13 は気泡表面の  $\theta_1=180^\circ$  の位置での最大変形量を  $\delta_{max} = R(\theta_1=180^\circ) - R_0$  と定義したとき、気泡の収縮過程において  $|\delta_{max}/R_0| \leq 1/3$  となる  $p_{g0}$  と  $\varepsilon_C$  の領域を図示したものである。斜線の領域は、気泡の収縮過程で  $\theta_1=180^\circ$  の位置での変形があまり大きくなり、気泡がほぼ球形を保ってリバウンドする領域を示している。したがって、斜線の領域内の  $p_{g0}$  と  $\varepsilon_C$  ではジェットは形成されない。図 5.13 より、 $p_{g0}$  が小さい場合には、壁からの距離が遠くても気泡は最終的に大きく変形すること、また、この境界を表す曲線は  $p_{g0}$  が約 0.07 より大きくなると、ほぼ  $\varepsilon_C$  に比例して変化していることがわかる。

図 5.14 に  $p_{g0}=0.05$ ,  $\varepsilon_C=0.5$  の時の剛体壁の中心  $C$  における圧力の時間変化を示す。実線は式 (2.80) による圧力を、一点鎖線は気泡の球形モードのみによる圧力を表している。図 5.14 からかなり大きな  $\varepsilon_C$  においても、気泡運動の初期の段階を



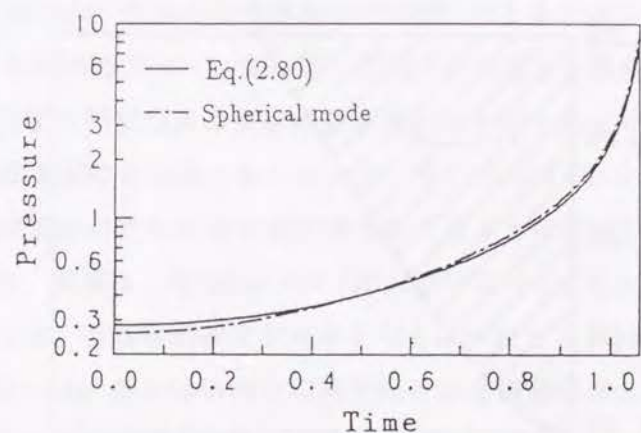


図 5.14 平面剛体壁中心の圧力の時間変化 ( $\varepsilon_C=0.5$ ,  $p_{g0}=0.05$ )

除いて、壁の圧力はほぼ球形モードの運動により記述できることがわかる。 $\varepsilon_C$  がさらに小さくなると、気泡の移動、変形による影響はより小さくなり、壁の圧力はいっそう球形モードで記述できることになる。このことから、気泡の運動は、鏡像の位置の気泡の球形モードの運動に主に支配され、並進運動および変形モードはあまり影響を与えていないことがわかる。

### 5.3.2 気泡の初期形状の影響

5.3.1 節では気泡の初期形状はすべて球としていた。本節では初期形状が球からわずかにずれた蒸気泡の崩壊問題を境界要素法を用いて解析し、気泡の初期形状がマイクロジェット形成に及ぼす影響を調べる。ただし、表面張力の影響は無視されている。

図 5.15 は初期形状が、(a) 長径が短径より 2% 長い楕円を短軸まわりに回転した回転楕円形、(b) 球形、(c) 長径が短径より 2% 長い楕円を長軸まわりに回転した回転楕円形の蒸気泡の崩壊過程における形状および流跡線を表している。ここで、平面剛体壁と初期気泡中心との距離は  $L_C=1.5$  としている。図 5.15 の (a)~(c) を比較すると、どの場合も壁の反対側にくぼみを生じているが、収縮が進むにつれて (a) の楕円を短軸まわりに回転させた形状の気泡が他の二種類の気泡に比べて鋭いくぼみを生じて崩壊に至ることがわかる。図 5.16 に図 5.15 の (a)~(c) の場

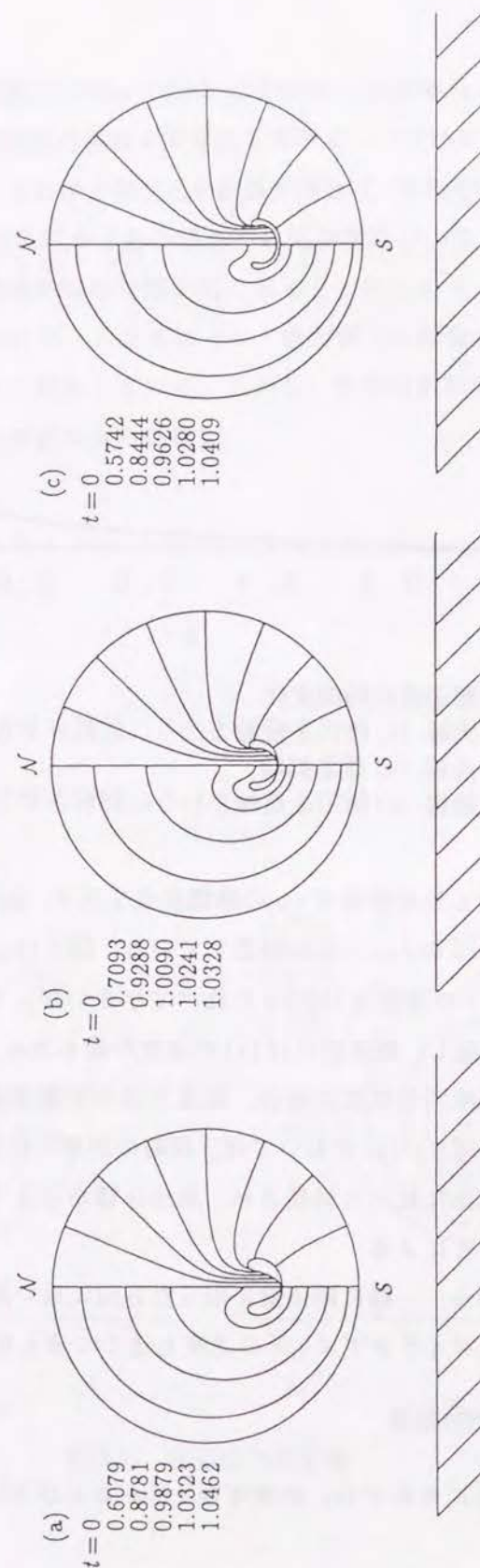


図 5.15 平面剛体壁近傍での蒸気泡の崩壊 (初期形状の影響)  
(a) 楕円を短軸まわりに回転させた回転楕円形気泡  
(b) 球形気泡  
(c) 楕円を長軸まわりに回転させた回転楕円形気泡



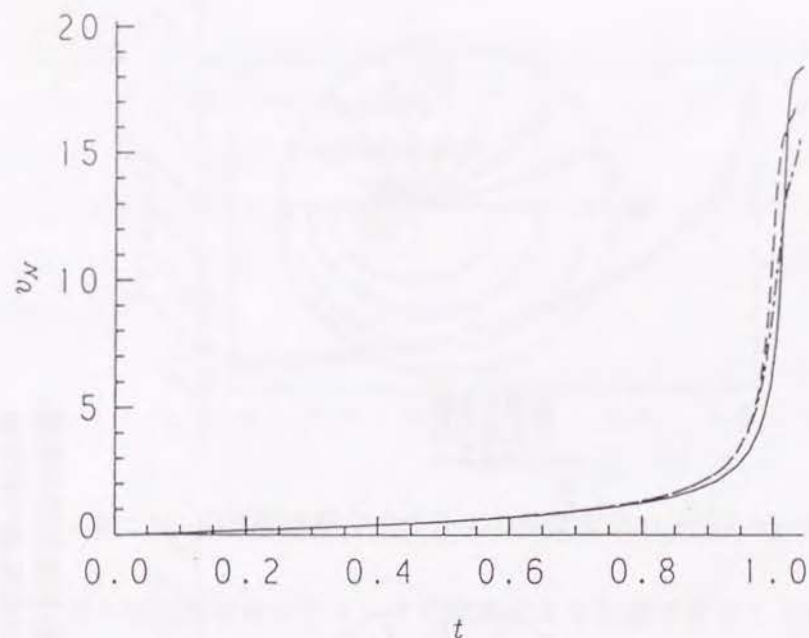


図 5.16 気泡壁速度の時間変化

実線: (a) 楕円を短軸まわりに回転させた回転楕円形気泡  
点線: (b) 球形気泡  
一点鎖線: (c) 楕円を長軸まわりに回転させた回転楕円形気泡

合の  $N$  極における気泡壁速度  $v_N$  の時間変化を示す。図中の実線、点線、一点鎖線はそれぞれ図 5.15 の (a)~(c) に対応している。図 5.16 より、収縮の初期の段階では、(a) の  $N$  極での速度は (b), (c) に比べて小さいが、その後収縮が加速されると速度の関係が逆転し、最終的には (a) の速度が最も大きくなることがわかる。これは一般に、単一楕円形気泡の場合、短径方向の収縮速度は長径方向に比べて小さく<sup>(7)</sup>、そのため図 5.15(a) においては、収縮の初期の段階での壁の反対側のくぼみの発生が他の気泡に比べて抑制され、気泡体積が小さくなってから  $N$  極での変形が助長されることによる。

以上の結果から、一般に剛体壁に沿った方向に長い気泡ほど  $N$  極周辺に鋭いくぼみを形成し、マイクロジェット の速度も速くなるものと予想される。

### 5.3.3 表面張力の効果

図 5.17(a),(b) にそれぞれ、初期半径 1 mm および 30  $\mu\text{m}$  のガス気泡の崩壊の様

子を示す。計算は境界要素法を用いて行われている。計算条件は  $L_C=1.5$ ,  $p_v=0$ ,  $p_{g0}=0.05$  としている。表面張力係数  $\sigma$  は有次元表示で  $\sigma=7.275 \times 10^{-2} \text{ N/m}$  としている。したがって、(a),(b) における無次元表面張力係数は、それぞれ  $\sigma=7.182 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma=2.394 \times 10^{-2}$  となる。図 5.17 からわかるように気泡半径が小さくなり、表面張力の影響が大きくなると気泡の崩壊時間が短くなることがわかる。これは理論的には 3.3.2 節の式 (3.52), (3.53) からわかるように、表面張力の影響が大きくなると固有振動数が高くなることに対応している。しかし、気泡の最終的な形状に及ぼす表面張力の効果はあまり顕著にみられない。

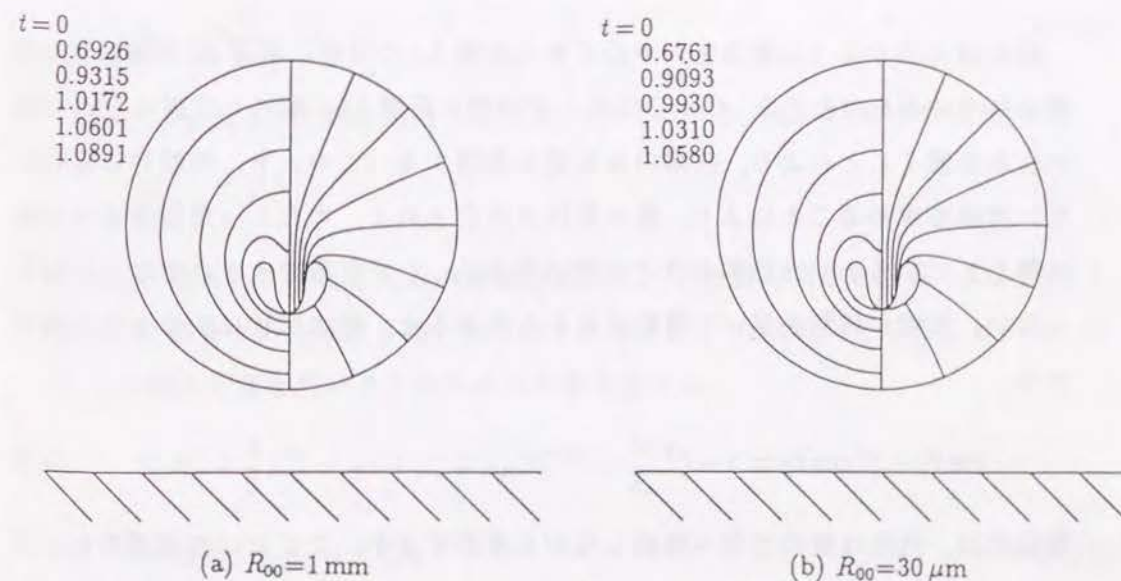


図 5.17 表面張力の影響



## 5.4 曲面剛体壁近傍での単一気泡の崩壊

### 5.4.1 鏡像の気泡を用いた理論解析

本節ではまず鏡像理論を用いて、剛体壁近傍での気泡の崩壊問題をそれと等価な2個の気泡の問題に置き換え、滑らかな曲率を持つ剛体壁近傍での気泡の挙動について解析する。

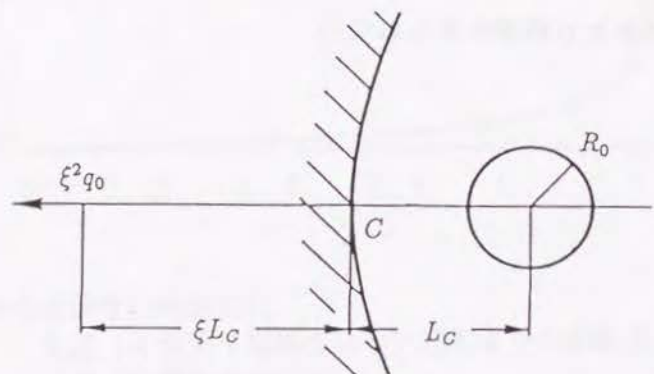


図 5.18 曲面剛体壁近くの球形気泡

図 5.18 に示すように剛体壁の中心  $C$  から距離  $L_C$  の位置に半径  $R_0$  の球形気泡が置かれているものとする。  $C$  から気泡と反対側に距離  $\xi L_C$  離れた位置に  $\xi^2 q_0$  の吸い込みを置くことにより、曲率のある壁を表現する。このとき、時間的に変化しない流線を求めることにより、壁の形状が決定される。ただし、無限遠方で流体は静止しているという境界条件との整合性から、 $\xi$  は有限の大きさでなくてはならない。気泡が球形を保って運動すると仮定すると、壁の形状は次のように表される。

$$\cos \theta_1 - \xi^2 \cos \theta_2 = 1 - \xi^2 \quad (5.9)$$

現実には、気泡は壁の方向へ移動しながら変形するが、ここでは並進運動および変形を無視し、オーダー  $\varepsilon$  の範囲内で球形気泡に及ぼす壁の曲率の影響を考える。式(5.9)で表される壁は、 $\xi$  によりその形状が変化する。図 5.19 に  $\xi$  による形状の

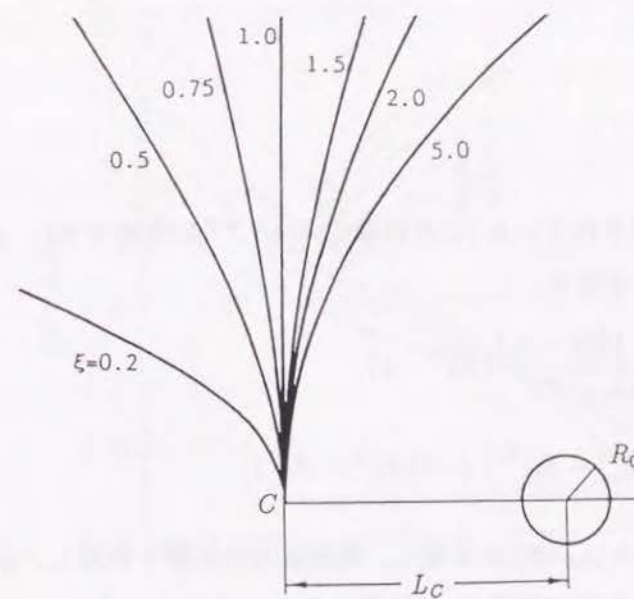


図 5.19 曲面剛体壁の形状

変化を示す。壁の形状は、 $\xi \rightarrow 0$  のとき無限空間を表し、 $\xi=1$  のときには平面壁を表している。壁の中心  $C$  の(平均)曲率  $H_C$  は次式で定義される。

$$H_C = \frac{(3\xi - 1)}{4\xi} \quad (5.10)$$

ただし、 $H_C$  は  $L_C$  で無次元化している。 $\xi=1$  のときの壁の中心の曲率は

$$H_C = \frac{3}{4}(\xi - 1) \quad (5.11)$$

と近似される。このとき気泡の運動方程式は、平面壁の場合と比較して、壁から鏡像の位置までの距離が  $\xi$  倍、吸い込みの強さが  $\xi^2$  倍になっていることから、式(5.2)の無次元量を用いると次のように書き表せる。

$$R_0 R_0'' + \frac{3}{2} R_0'^2 = -1 + p_v + p_{g0} R_0^{-3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_0} - \varepsilon R_0 (R_0 R_0'' + 2 R_0'^2) \quad (5.12)$$

ここで、



$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_C \xi^2}{(1 + \xi)} \quad (5.13)$$

$$\varepsilon_C = \frac{R_{00}}{L_C} \quad (5.14)$$

ただし, “\*”は省略されている(これ以降の式も“\*”を省略する). 式(5.12)を積分すると, 以下の式を得る.

$$R_0'^2 = \frac{1}{1 + \hat{\varepsilon} R_0} \left[ \frac{2(1 - p_v)}{3} (R_0^{-3} - 1) + \frac{2p_{g0}}{3(\gamma - 1)} (R_0^{-3} - R_0^{-3\gamma}) + 2\sigma(R_0^{-3} - R_0^{-1}) \right] \quad (5.15)$$

いま, 空洞気泡 ( $p_v=0, p_{g0}=0$ ) を仮定し, 表面張力の影響を無視し, さらに,  $\hat{\varepsilon} \ll 1$  を仮定すると, 気泡の崩壊時間  $T_l$  は以下のように表現される.

$$T_l = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{R_0^{3/2} (1 + \hat{\varepsilon} R_0)^{1/2}}{(1 - R_0^3)^{1/2}} dR_0 \approx 0.9147(1 + 0.4065\hat{\varepsilon}) \quad (5.16)$$

ここで,  $\xi=0$  ( $\hat{\varepsilon}=0$ ) の場合は Rayleigh<sup>(6)</sup>によって導かれた無限空間内の単一気泡の崩壊時間を,  $\xi=1$  ( $\hat{\varepsilon}=\varepsilon_C/2$ ) の場合は平面壁近くでの崩壊時間<sup>(8)</sup>を表している. この式から, 一般に, 気泡の崩壊時間は無限空間内の気泡に比べて  $0.4065 \times \hat{\varepsilon}$  だけ延びることがわかる. また, 気泡に対して, 凹状の壁がある場合 ( $\xi > 1$ ) には, 平面壁の場合に比べて崩壊時間が延び, 逆に, 凸状の壁がある場合 ( $\xi < 1$ ) には, 崩壊時間が短くなることもわかる. 壁の曲率の影響は, 実際の気泡中心と曲面壁との距離の  $(1 + \xi)/(2\xi^2)$  倍の位置に平面壁が存在することと同じ効果を持っている. なお, 式(5.16)は, 最近, Tomita ら<sup>(9)</sup>により実験とよく一致することが確かめられている.

壁の中心での無次元圧力  $p_C$  は, 次式で与えられる.

$$p_C = 1 + \frac{(1 + \xi)\varepsilon_C R_0}{3(1 + \hat{\varepsilon} R_0)^2} \left[ (p_v - 1)(4 + 3\hat{\varepsilon} R_0 - R_0^{-3}) - 3\sigma(2\hat{\varepsilon} + 3R_0^{-1} - R_0^{-3}) + \frac{p_{g0}}{\gamma - 1} [R_0^{-3\gamma} \{(3\gamma - 4) + 3\hat{\varepsilon} R_0(\gamma - 1)\} + R_0^{-3}] \right] \quad (5.17)$$

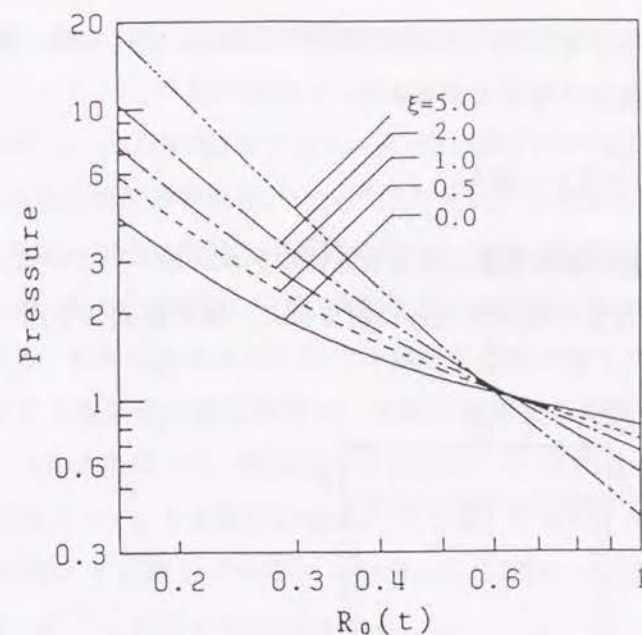


図 5.20 曲面剛体壁の中心の圧力

図 5.20 は  $\varepsilon_C=0.2, p_{g0}=0.05$  の場合に式(5.17)で決定される圧力と気泡半径(初期半径 1 mm) との関係を表している. 図 5.20 から, 気泡半径が比較的大きな間(約  $R_0 > 0.6$ ) では  $\xi$  が小さな場合ほど剛体壁中心での圧力が高くなっているが, 気泡半径が小さくなるにつれてこの関係が逆転し,  $\xi$  が大きな場合ほど剛体壁中心での圧力が高くなっていることがわかる.

気泡の最小半径  $R_{min}$  は, 式(5.15)において左辺を零 ( $R_0'=0$ ) とすることにより得られるが, この値は無限空間内の単一気泡の最小半径と同じであるため, 壁中心での最大圧力を  $p_{max}$ , 無限空間内の気泡による壁の中心の位置での最大圧力を  $p_{0max}$  とすると, 次の関係が得られる.

$$\frac{p_{max} - 1}{p_{0max} - 1} = \frac{(1 + \xi)^2}{1 + \xi + \varepsilon_C R_{min} \xi^2} \quad (5.18)$$

この式から, 最大圧力は  $\xi$  が大きくなると, すなわち, 壁の曲率が大きくなると高くなることがわかる. いま,  $\xi \approx 1$  とすると式(5.18)は次のように近似できる.

$$\frac{p_{max} - 1}{p_{0max} - 1} = \frac{4}{2 + \varepsilon_C R_{min}} \left\{ 1 + \frac{4(1 - \varepsilon_C R_{min})}{3(2 + \varepsilon_C R_{min})} H_C \right\} \quad (5.19)$$



この式から、気泡に対して凹状の壁が存在するとき ( $\xi > 1$ ) には、最大圧力の増加分は、ほぼ曲率に比例することがわかる。

#### 5.4.2 境界要素法を用いた解析

前節で扱った問題は鏡像理論で扱える剛体壁形状に限られていた。本節では、剛体壁を曲率を持つ任意の軸対称物体に置き換え、境界要素法を用いて、気泡の運

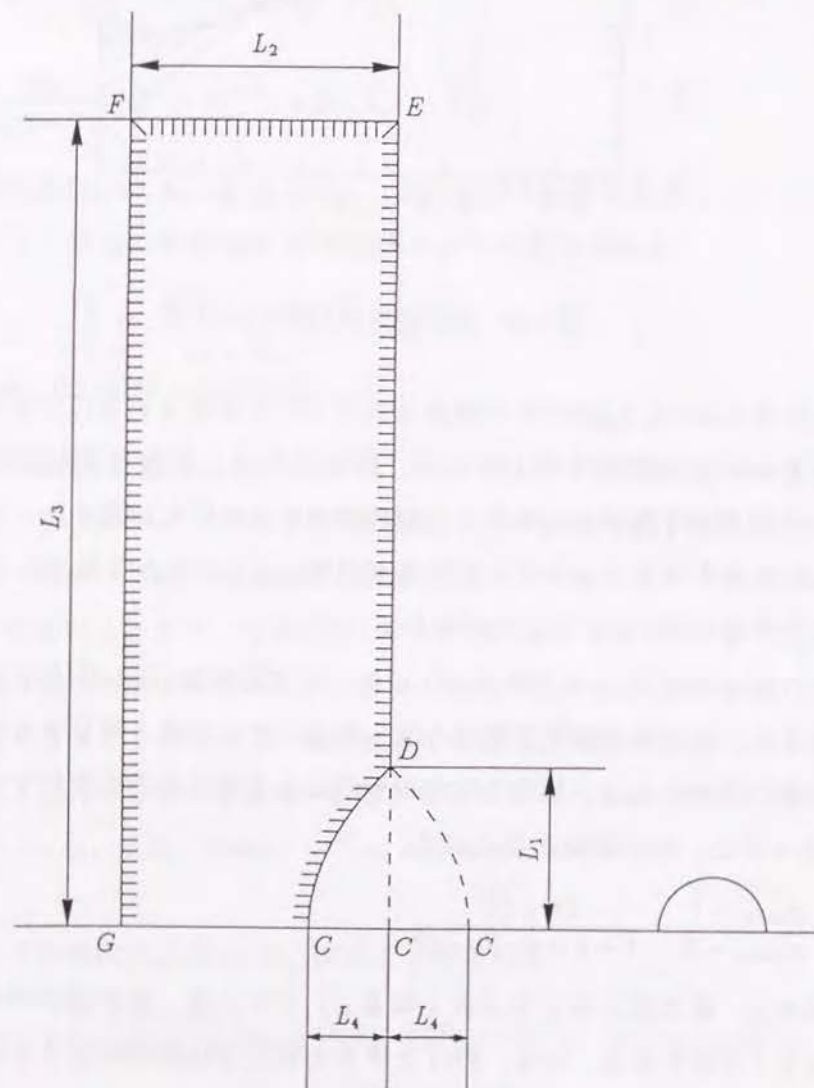


図 5.21 剛体の形状

動を解析する。本節で用いる剛体の形状を図 5.21 に示す。ここで、 $L_1=3$ ,  $L_2=5$ ,  $L_3=15$ ,  $L_4=1.5$  とし、 $C, D$  間の形状としては、 $C$  を原点とする円柱座標系  $(r, \psi, z)$  を定義するとき、 $z=r^2/6$  (実線) または  $z=-r^2/6$  (点線) の放物面であるとし、 $z=r^2/6$  のくぼみがある場合を凹放物面壁、 $z=-r^2/6$  の突起がある場合を凸放物面壁と呼ぶことにする。なお、本節で用いる平面剛体壁としては、前節までに用いた半無限平面壁の代わりに、凹放物面壁および凸放物面壁との比較のため、半径  $L_3$ 、高さ  $L_2$  の円柱を用いる。有限の大きさの円柱で半無限平面剛体壁を代用すると、 $L_C=1.5$  の位置に存在する蒸気泡の崩壊時間は、半無限剛体壁の場合の時間 1.033 から約 1.3 % 減少し、1.019 になった。剛体壁の分割数は、 $C, D$  間は  $r$  に関して均等に 15 分割、 $D, E$  間は  $3 \leq r \leq 9$  の範囲を均等に 20 分割、 $9 \leq r \leq 15$  の範囲を均等に 10 分割し、 $E, F$  間は  $z$  に関して均等に 5 分割、 $F, G$  間は  $r$  に関して均等に 15 分割とした。なお、以下の解析では  $\sigma=0$  とする。

図 5.22 にそれぞれ (a) 凸放物面壁, (b) 平面壁, (c) 凹放物面壁の中心  $C$  から  $L_C=1.5$  のところに存在する蒸気泡の崩壊の様子を示す。図 5.22 より, (c) の凹放物面壁近くの気泡は, (a), (b) に比べて, 気泡体積が大きな段階から変形が助長され, 崩壊時間が延び, 壁面への移動量が大きくなっていることがわかる。この傾向は 5.3.1 節で述べたように, 壁の形状が同じで, 壁と気泡間距離が異なるときの気泡の挙動に類似している。

図 5.23, 5.24 に図 5.22 の条件における,  $N$  極での速度  $v_N$  と気泡体積  $V_b$  との関係ならびに剛体壁の中心  $C$  での圧力  $p_C$  と気泡体積との関係を示す。図中の実線は平面壁近くの気泡, 点線は凹放物面壁近くの気泡, 一点鎖線は凸放物面壁近くの気泡の場合である。図 5.23 より, 速度  $v_N$  は, 最初, 凹放物面壁近くの気泡の場合に最も速くなっているが, 体積が小さくなると大小関係が逆転し, 崩壊の最終段階では, 凸放物面壁近くの気泡の場合に最も速くなっていることがわかる。この原因は, 凸放物面壁近くの気泡の場合には, 平面壁および凹放物面壁近くの気泡と比べて, 体積が小さくなり, 収縮速度が加速されたのちに変形が進むためである。そのため, マイクロジェットが気泡壁を貫通するときの速度は凸放物面壁の場合が最も速いものと考えられるが, 図 5.22 からわかるように, 凸放物面壁の場合には凹放物面壁と比べて, 剛体壁から離れた位置でマイクロジェットが形成され



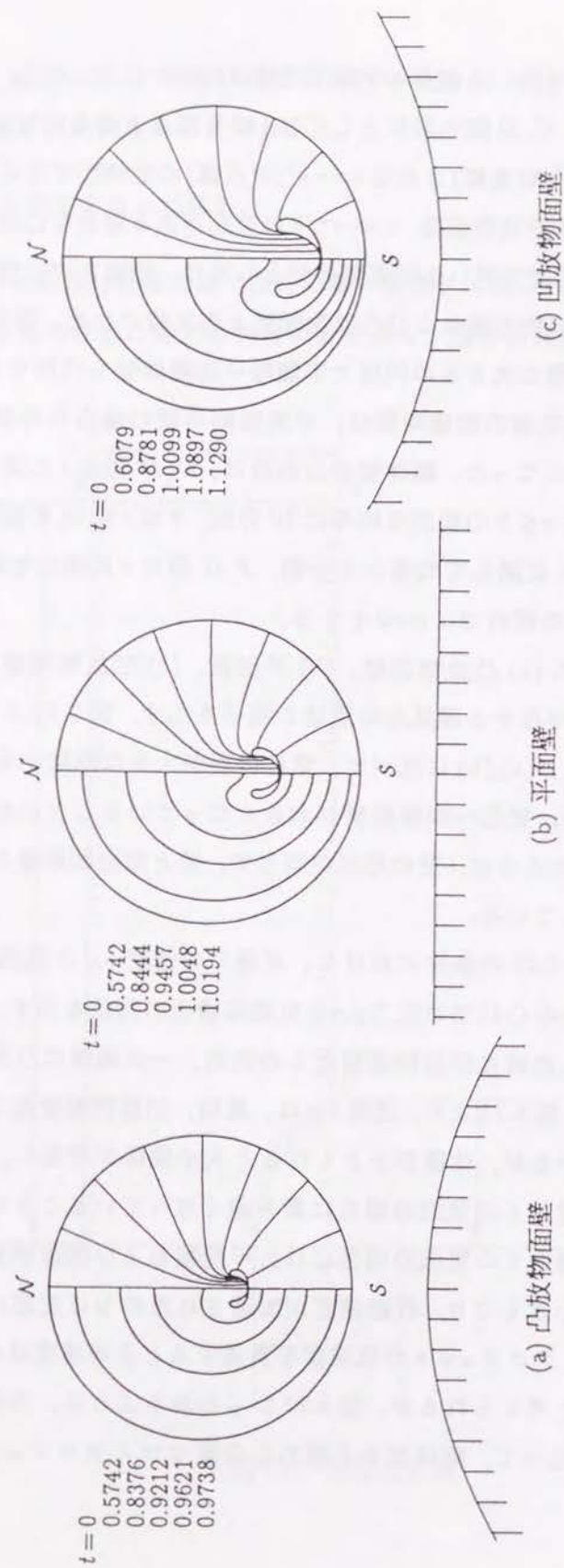


図 5.22 剛体壁近傍での蒸気泡の崩壊

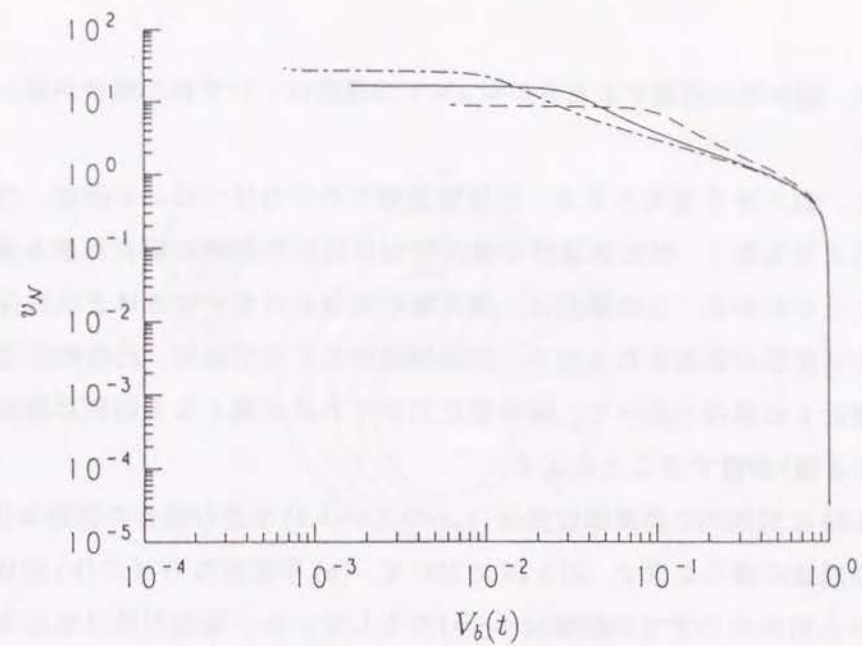


図 5.23 気泡壁速度と体積の関係 (蒸気泡)

一点鎖線: 凸放物面壁  
実線: 平面壁  
点線: 凹放物面壁

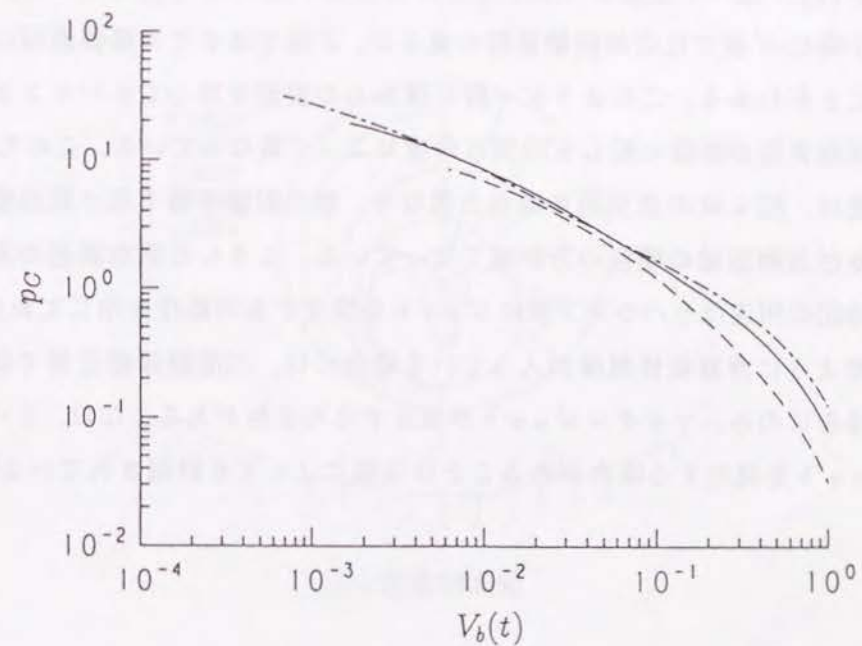


図 5.24 剛体壁の中心の圧力と体積の関係 (蒸気泡)

一点鎖線: 凸放物面壁  
実線: 平面壁  
点線: 凹放物面壁



るため、剛体壁に到達するときのジェット速度は、いずれの場合が速いか結論できない。

次に、図 5.24 を見てみると、凹放物面壁での圧力はつねに平面壁、凸放物面壁の圧力よりも低く、気泡崩壊時の最大圧力は凸放物面壁の場合が最も高くなっていることがわかる。この原因は、剛体壁の曲率が大きくなるほど気泡体積が大きいうちに変形が助長されるため、凹放物面壁近くの気泡は、凸放物面壁ならびに平面壁近くの気泡と比べて、剛体壁圧力がそれほど高くなる以前に気泡の上下壁面 ( $N$ ,  $S$  極) が接することによる。

図 5.25 に気泡内に非凝縮性気体 ( $p_{g0}=0.2, \gamma=1.4$ ) を含む場合の初期半径 1 mm の気泡の崩壊の様子を示す。図 5.25 において、(a) 平面壁ならびに (b) 凹放物面壁の中心から気泡中心までの距離は  $L_C=1.5$  としている。気泡形状は気泡体積が最小となる時間まで表示している。図 5.26(a),(b) は図 5.25(a),(b) における  $N$ ,  $S$  極における速度の絶対値の時間変化を表している。図 5.25 より気泡形状は図 5.22 の蒸気泡の場合と比べて形状に丸みを帯びており、壁の影響をより大きく受ける (b) の場合が (a) に比べて変形が大きいことがわかる。図 5.26 を見てみると、気泡体積が最小時に  $N$  極では依然収縮過程にあるが、 $S$  極ではすでに膨張過程に移行していることがわかる。このように一般に球からの変形を伴ってリバウンドする状況では気泡表面が膨張に転じる時間は角度によって異なっている。このため  $N$  極での速度は、図 5.23 の蒸気泡の場合と異なり、壁の影響を強く受け気泡変形が大きくなる凹放物面壁の場合の方が速くなっている。こうした気泡表面の角度による膨張時間の相違はリバウンド後にジェットを発生する可能性を示しており、本計算条件のように非凝縮性気体が入っている場合には、凹面剛体壁近傍で収縮する気泡の場合にのみ、マイクロジェットが発生する可能性がある。なお、リバウンド後にジェットを発生する可能性があることは実験によっても観測されている<sup>(4),(10)</sup>。

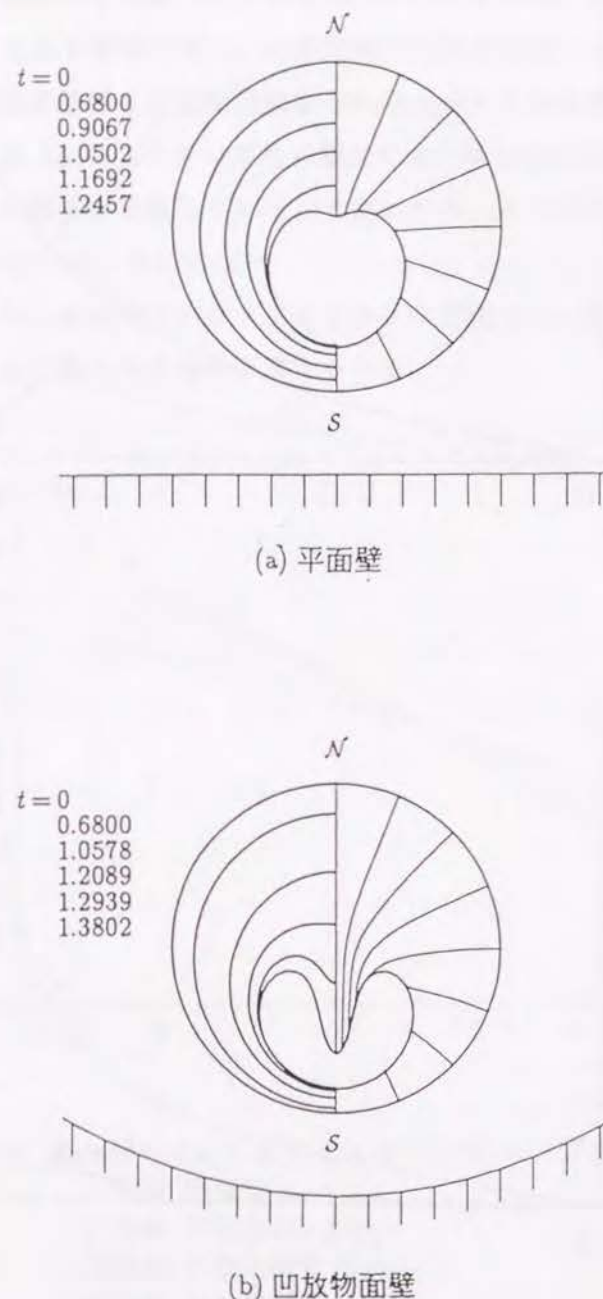


図 5.25 剛体壁近傍でのガス気泡の崩壊 ( $p_{g0}=0.2$ )



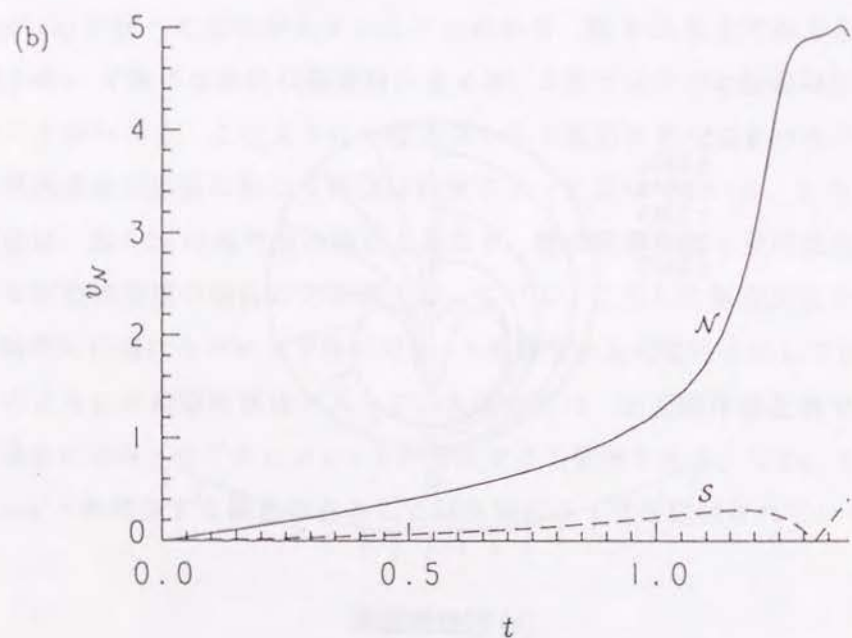
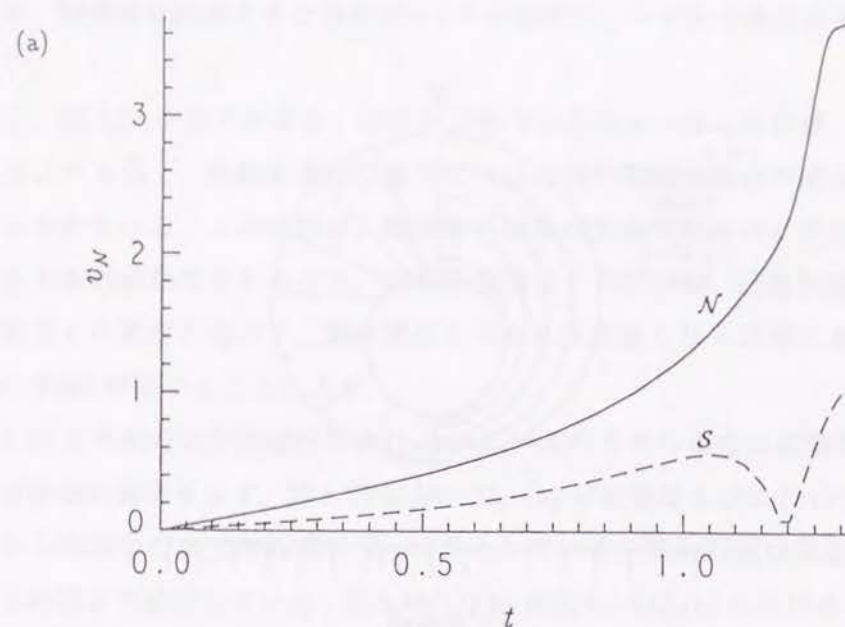


図 5.26 気泡壁速度の時間変化 (ガス気泡:  $p_{g0}=0.2$ )

(a) 平面壁  
(b) 凹放物面壁

図 5.27 に図 5.25 の条件のときの剛体壁中心での圧力  $p_C$  と気泡体積  $V_b$  との関係を示す。図中の実線は平面壁中心から  $L_C=1.5$  にある気泡の場合、点線は平面壁中心から  $L_C=3$  にある気泡の場合、一点鎖線は凹放物面壁中心から  $L_C=1.5$  にある気泡の場合、二点鎖線は凹放物面壁中心から  $L_C=3$  にある気泡の場合を表している。図 5.27 より  $L_C=1.5, 3$  のいずれの場合にも、はじめは放物面壁の方が低く、その後圧力の大小関係が逆転していることがわかる。この結果は鏡像理論を用いたときの図 5.20 と一致している。

以上の結果から、気泡がリバウンドするような状況では、剛体壁での最大圧力は凹面壁の場合ほど高くなるものと考えられる。

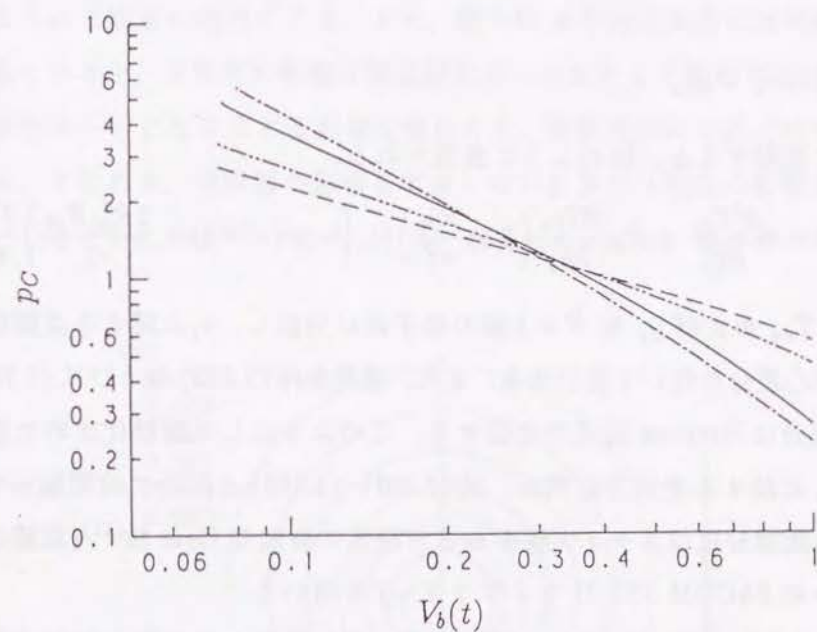


図 5.27 剛体壁の中心の圧力と体積の関係 (ガス気泡:  $p_{g0}=0.2$ )

実線: 平面壁 ( $L_C=1.5$ )

点線: 平面壁 ( $L_C=3$ )

一点鎖線: 凹放物面壁 ( $L_C=1.5$ )

二点鎖線: 凹放物面壁 ( $L_C=3$ )



## 5.5 粘性の効果

### 5.5.1 数値計算方法

式(2.104), (2.105)には  $T_{In}$  に関する積分の項が含まれているため, 式(2.103)~(2.105)は式(2.99)の偏微分方程式と連立して解かれる必要がある。しかし, 気泡周囲の境界層が十分に薄いとして,  $T_{In}$  の積分の影響を無視すれば, 式(2.103)~(2.105)は連立常微分方程式系に帰着され, 計算は容易になる。そこで, 本研究では境界層の影響を考慮するか否かで異なる数値計算法を用いる。境界層を無視した場合には, 前節までと同様に代表的な常微分方程式の解法である Adams 法を用いる。次に境界層を考慮する場合の計算方法について述べる。まず, 式(2.99)を Lagrange 変換

$$\hat{y}_I = r_I - R_{In} \quad (5.20)$$

を用いて変形すると, 次のように表現される。

$$\frac{\partial T_{In}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 T_{In}}{\partial \hat{y}_I^2} + \dot{R}_{I0} \frac{\partial T_{In}}{\partial \hat{y}_I} \left( 1 - \frac{R_{I0}^2}{r_I^2} \right) + \left\{ -\nu n(n+1) + \frac{2R_{I0}^2 \dot{R}_{I0}}{r_I} \right\} \frac{T_{In}}{r_I^2} \quad (5.21)$$

ここで,  $T_{In}$  および  $\hat{y}_I$  を  $\hat{N}+1$  個の格子点に分割し,  $\hat{y}_I$  に関する空間微分を二次精度の中心差分を用いて近似する。また, 境界条件(2.100)および式(2.104), (2.105)の空間積分は Simpson 公式で近似する。このようにして離散化された格子点上の変数  $T_{In}$  に関する差分方程式を, 式(2.103)~(2.105)と同時に時間積分を行う。ここで, 時間積分にはスティッフ性のある方程式に有効な Gear 法<sup>(11)</sup>(京都大学計算機センターの FACOM SSL II ライブラリー)を用いる。

なお, 本節で以下に示される解析では, 特に断わらない限り初期半径の等しい2個の蒸気泡を対象とし, 表面張力の影響を無視する。

### 5.5.2 気泡の崩壊

図 5.28 の左半分は非粘性 ( $\nu=0$ ) の場合, 右半分は  $\nu=0.01$  で境界層の影響を無視した場合の蒸気泡の崩壊の様子 ( $\varepsilon=R_{I0}/L_0=1/5$ ) である。図 5.29 は  $\varepsilon=1/5$  のときの球形モード  $R_{I0}$ , 気泡中心の移動量  $b_I$ , 変形モード  $R_{I2}, R_{I3}$  の時間変化を

表している。実線は非粘性 ( $\nu=0$ ) の場合, 一点鎖線および二点鎖線はそれぞれ,  $\nu=0.001, 0.01$  で境界層の影響を無視した場合, 三点鎖線は  $\nu=0.01$  で境界層の影響を考慮した場合を表している。 $\nu=0.001, 0.01$  という条件は,  $\Delta p=10^5 \text{ Pa}$  とすると, それぞれ,  $20^\circ\text{C}$  水中における初期半径約  $100, 10\mu\text{m}$  の気泡の場合に対応している。図 5.28 から,  $\nu=0.01$  の場合には, 粘性の影響で気泡の変形はかなり緩和され, 特に, 収縮速度が最も大きい  $\theta_1 \approx 180^\circ$  側(相手の気泡の反対側)の気泡形状に大きな影響が現れていることがわかる。このことは, 図 5.29 からわかるように,  $\nu$  が大きくなるにつれて, 変形モードが粘性により著しく減衰させられることによる。変形モードの減衰は, 式(2.105)における変形速度および球形モードの収縮速度に比例する粘性の効果が変形の次数  $n$  の二乗のオーダーで効いてくるため,  $n$  が大きくなるほど顕著に現れてくる。また, 図 5.29 より気泡周辺の境界層の効果についてみると, 境界層の影響は並進移動量にはほとんど影響を及ぼさないが, 高次の変形モードになるほど変形量を増加させ, 非粘性の解に近づけていることがわかる。すなわち, 境界層の影響を考慮しない計算では粘性の影響は過大に評価されていることになる<sup>(12)</sup>。このことは, 前述したように, 境界層を無視した方

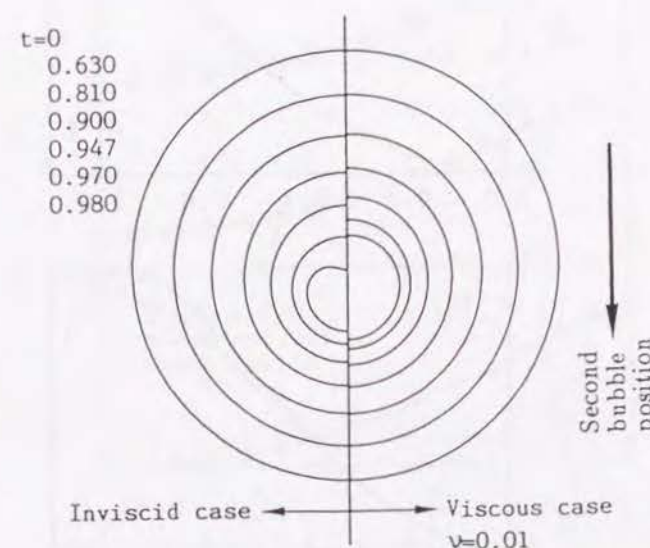


図 5.28 崩壊過程における粘性の影響 ( $\varepsilon=1/5$ )



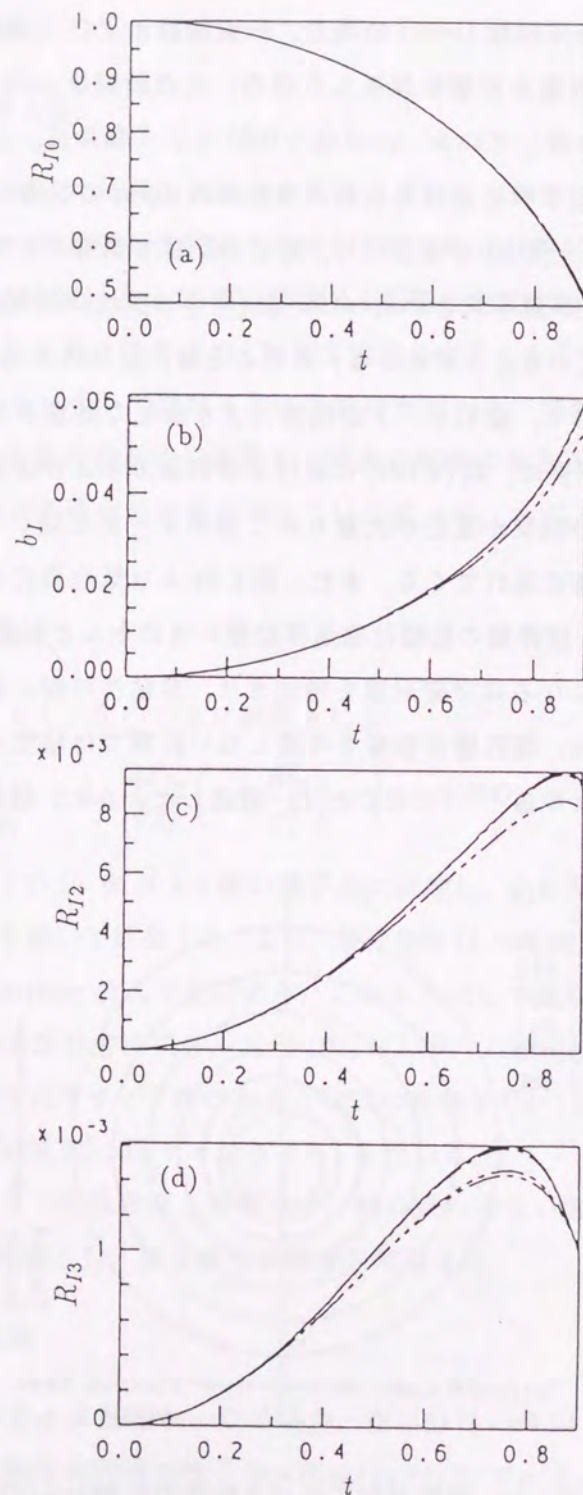


図 5.29 球形モード (a), 気泡中心の移動量 (b), 変形モード [(c),(d)] の時間変化 [ $\varepsilon=1/5$ , 実線:  $\nu=0$ , 一点鎖線:  $\nu=0.001$ (境界層を無視), 二点鎖線:  $\nu=0.01$ (境界層を無視), 三点鎖線:  $\nu=0.01$ (境界層を考慮)]

程式では、単位時間当りの消散エネルギーがポテンシャル理論で与えられる速度勾配を用いて評価されているため、境界層内での速度勾配が過剰に見積られ、粘性の影響が大きめに評価される傾向にあるためと考えられる。ただし、図 5.3 からわかるように第一次近似の適用範囲は並進移動速度が比較的小さな場合に限定されているため、収縮が進み並進移動速度が大きくなると、並進運動が変形に及ぼす効果が粘性項に関しても現れる可能性が考えられる。

図 5.30 は、気泡の崩壊過程において、 $\theta_I=180^\circ$ での気泡壁の収縮速度が粘性の影響で、非粘性の場合と比べて、10%減速させられるときの各 $\nu$ における球形モード半径  $R_{I0}$  と  $\varepsilon$  との関係を示したものである。ただし、境界層の影響は無視している。 $\varepsilon=0$  は単一気泡の場合であり、気泡は球形を保って収縮する。一般に、 $\varepsilon$  が大きくなると相互作用の影響が大きくなり、気泡半径が比較的大きな間に変形が助長される。そのため、 $\varepsilon$  が大きくなるほど、粘性の影響は半径が大きな間に現れてくることがわかる。

図 5.31(a),(b) はそれぞれ、図 5.5 に示した平面剛体壁近傍で直線状に配置され

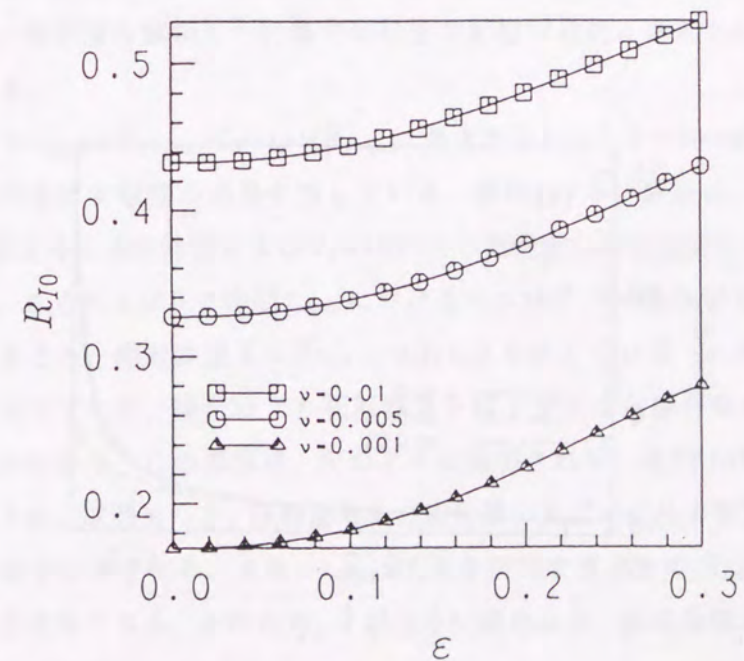


図 5.30 崩壊過程に及ぼす粘性の影響



た気泡1 および2 の  $N$  極の速度の時間変化を表している。実線は  $\nu=0$ 、破線は  $\nu=0.001$ 、一点鎖線は  $\nu=0.01$  の場合を表している。なお、図5.31は式(3.60)~(3.62)により得られたものである。図5.31より、 $\nu=0.001$  の場合には本理論で扱える範囲では粘性の影響は顕著に現れず、ほぼポテンシャル理論で記述できることがわ

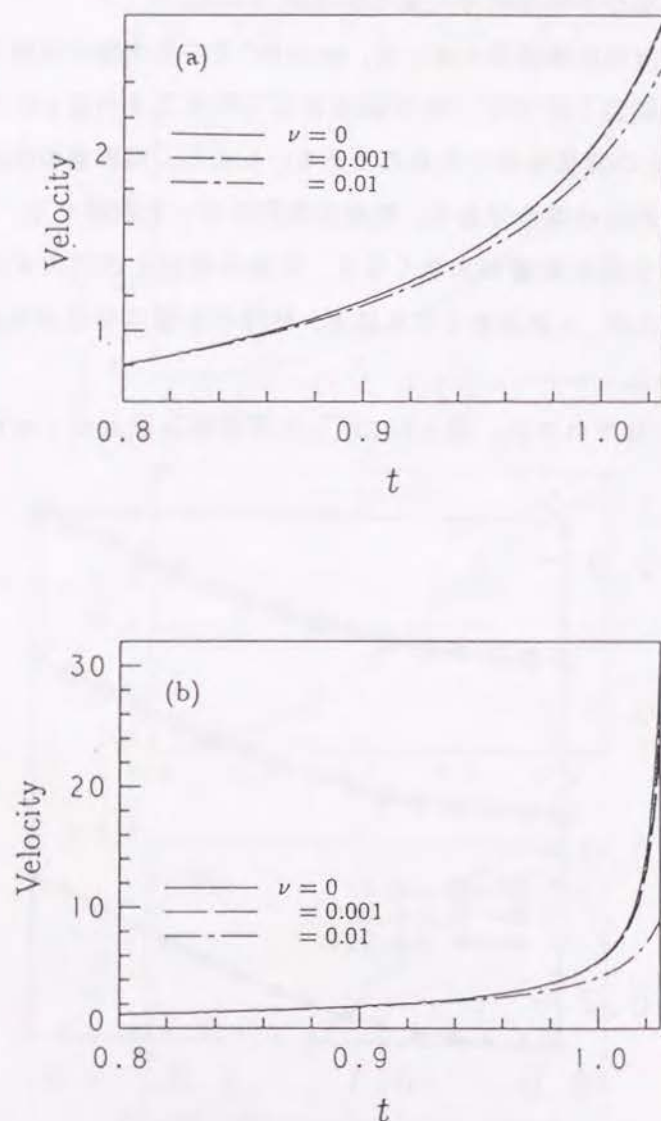


図5.31 気泡壁速度に及ぼす粘性の影響  
(a) 気泡1  
(b) 気泡2

かる。しかし、 $\nu=0.01$  の場合には、図5.27, 5.28の場合と同様に気泡壁速度が増すにつれて粘性の影響が現れ、気泡の運動は緩慢になる。このことは変形の大きな気泡2の速度に最も顕著に現れる。

以上の結果から、水中での初期半径が数  $10\mu\text{m}$  の気泡の崩壊問題を扱う際には液体の粘性の影響を考慮する必要があるが、初期半径が  $1\text{mm}$  程度の気泡の崩壊の場合には粘性の影響は大きく現れず、気泡の挙動はほぼポテンシャル理論で記述できるものと考えられる。

### 5.5.3 気泡の成長

図5.32に、初期半径の等しい2個の蒸気泡の成長過程における  $(\varepsilon=1/10)$   $R_{I0}$ ,  $b_I$ ,  $R_{I2}$ ,  $R_{I3}$  の時間変化を示す。実線は非粘性 ( $\nu=0$ ) の場合、一点鎖線および二点鎖線はそれぞれ、 $\nu=0.01, 0.1$  で境界層の影響を無視した場合、三点鎖線は  $\nu=0.1$  で境界層の影響を考慮した場合を表している。図5.32より、膨張速度は収縮速度に比べて小さいため、 $\nu=0.01$  では粘性の効果はあまり現れないことがわかる。また、境界層を考慮すると、崩壊過程の場合と同様に粘性の影響は緩和されている。そのため、境界層を無視した計算では粘性の影響が過剰に評価されていることが確認される。

図5.33は  $\varepsilon_{\max}=R_{I\max}/L_0=1/3$  ( $R_{I\max}$ : 最大半径) のときの  $\theta_I=180^\circ$  の気泡壁の膨張速度に及ぼす粘性の効果を表している。横軸は  $\varepsilon$  を、縦軸は、 $\nu=0$  で  $\varepsilon_{\max}=1/3$  を満足するときの時間および  $\theta_I=180^\circ$  での気泡壁の膨張速度を  $t_{\max}$  および  $v_{\nu 0}$  と定義し、さらに  $\nu \neq 0$  で時間  $t_{\max}$  における  $\theta_I=180^\circ$  での気泡壁の膨張速度を  $v_\nu$  と定義するとき、相対誤差  $\delta = |(v_{\nu 0} - v_\nu)/v_{\nu 0}|$  を表している。ただし、境界層の影響は無視している。図5.33より相対誤差  $\delta$  は  $\varepsilon$  が大きな場合ほど大きくなっていることがわかる。この原因は、次のように説明される。式(2.103)~(2.105)からわかるように、球形モード、移動量および変形量に及ぼす粘性の影響は、 $R_{I0}$  が大きくなるほど小さくなる。また、 $\varepsilon_{\max}=1/3$  を満足するときの  $R_{I\max}$  は  $\varepsilon$  が小さい場合ほど大きくなる。そのため、 $\varepsilon$  が小さい場合ほど、成長過程における粘性の影響は小さくなることになる。



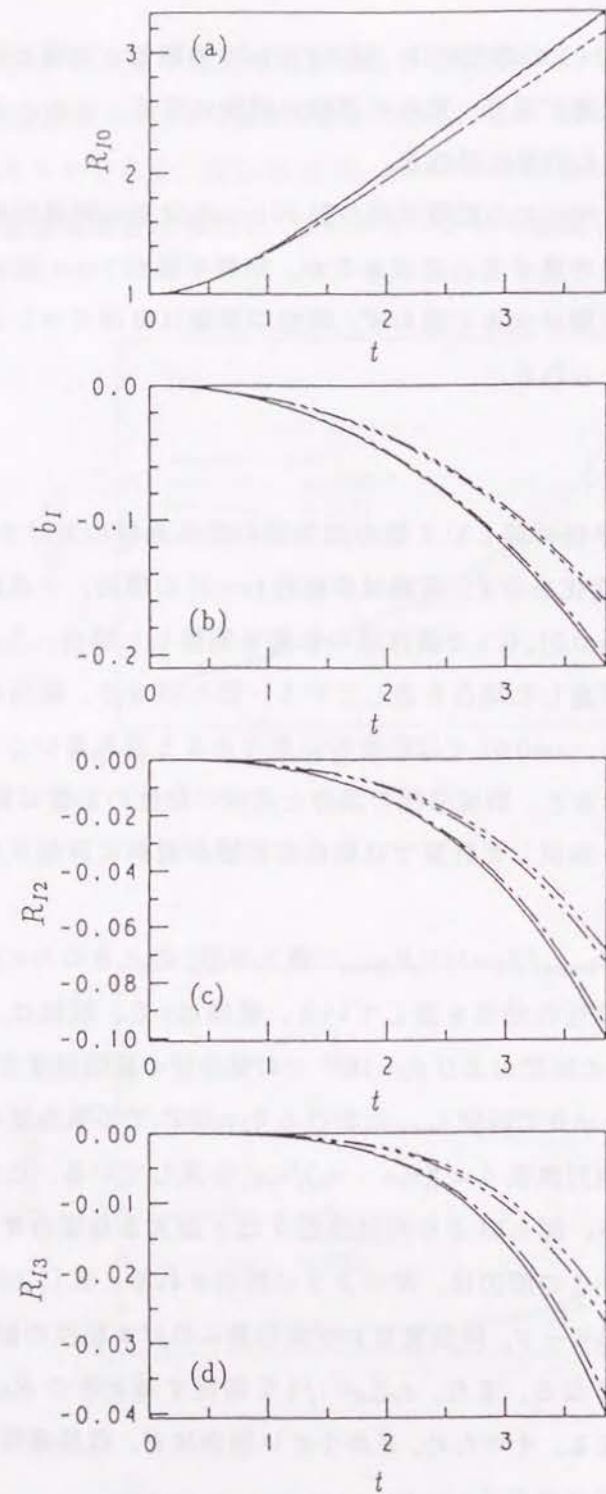


図 5.32 球形モード (a), 気泡中心の移動量 (b), 変形モード [(c), (d)] の時間変化 [ $\epsilon=1/10$ , 実線:  $\nu=0$ , 一点鎖線:  $\nu=0.01$ (境界層を無視), 二点鎖線:  $\nu=0.1$ (境界層を無視), 三点鎖線:  $\nu=0.1$ (境界層を考慮)]

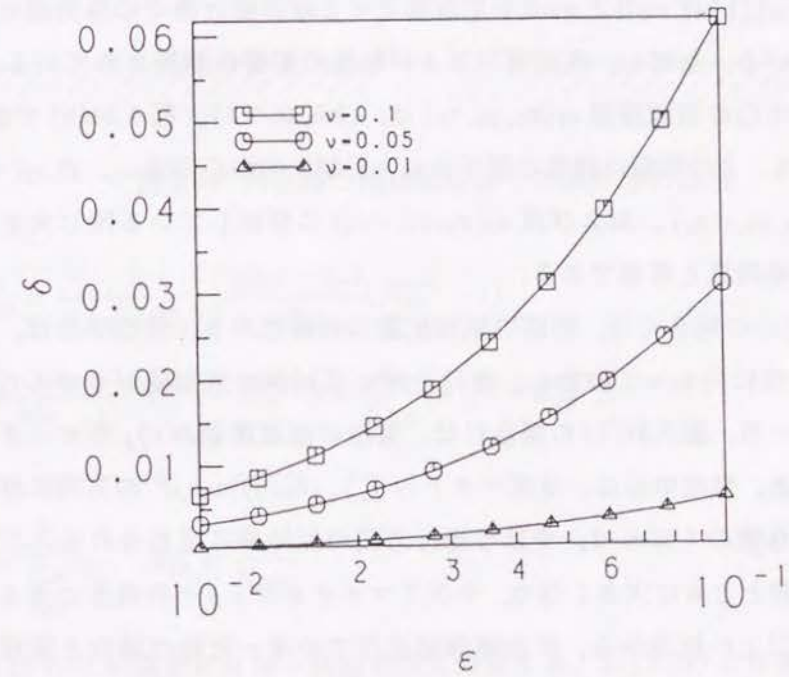


図 5.33 膨張過程における粘性の影響 ( $\epsilon=1/10$ )



## 5.6 気泡群の崩壊問題

### 5.6.1 角を持つ剛体壁近傍での単一気泡の挙動

気泡群を構成する気泡の初期半径がすべて同一で、幾何学的配置の対称性から気泡が同じ挙動を示すときには、その問題は鏡像の関係で、角を持つ剛体壁近傍での単一気泡の挙動に帰着される。本節では、まずこのような気泡群の挙動を扱う。

図 5.34(a),(b) は  $x=0$  と  $z=0$  を境界面とする剛体壁近傍での蒸気泡の崩壊の様子を表している。ただし、表面張力および粘性の影響は無視されている。図 5.34(a) での気泡中心の初期座標  $o_1(x_0, y_0, z_0)$  は、 $(2.5, 0, 2.5)$ 、図 5.34(b) では、 $(3.75, 0, 2.5)$  である。この問題は鏡像の関係から、初期気泡中心が点  $o_1$ 、点  $o_2(-x_0, y_0, z_0)$ 、点  $o_3(-x_0, y_0, -z_0)$ 、および点  $o_4(x_0, y_0, -z_0)$  に分布している同じ大きさの 4 個の気泡の崩壊問題と等価である。

図 5.34(a) の場合には、初期の気泡配置の対称性から、気泡中心は、剛体壁の頂点  $C$  の方向に向かって移動し、進行方向の反対側の気泡壁がくぼんだ形状になっている。一方、図 5.34(b) の場合には、気泡の並進運動が  $\varepsilon_{IJ}^2$  のオーダーで引き起こされるため、気泡中心は、ほぼベクトル  $\sum_{J=2}^4 \vec{o_1 o_J} / |\vec{o_1 o_J}|^3$  の方向に移動し、このときの気泡壁のくぼみは、やはり進行方向の反対側に認められる。これらのくぼみは、収縮とともに大きくなり、やがてマイクロジェットが発生に至るものと考えられる。以上の結果から、平面剛体壁近傍での単一気泡の場合と同様に、気泡の変形には気泡の並進運動が大きく影響し、気泡の進行方向の反対側の気泡壁にその影響が顕著に現れることがわかる。こうした進行方向の反対側に生じる不安定は、前述したように半径方向の収縮および並進運動による二重わき出しの相乗効果による。また、気泡の崩壊時間について見てみると、気泡間の相互作用の影響が大きな図 5.34(a) の方が時間が延びていることが認められる。これは、3.3 節で述べた線形理論を用いると固有振動数の低下と関連づけられるが、以下では線形理論を用いず、別の観点から崩壊時間が延びる理由について考える。

$L_{IJ} = \text{const.}$  とし、粘性の影響を無視し、球形モードの運動のみ考えると、すべての気泡が同位相で運動する場合には、球形モードの運動方程式は式 (5.15) の場合と全く同様に積分できるため、気泡の収縮速度 (有次元) は次のように表される。

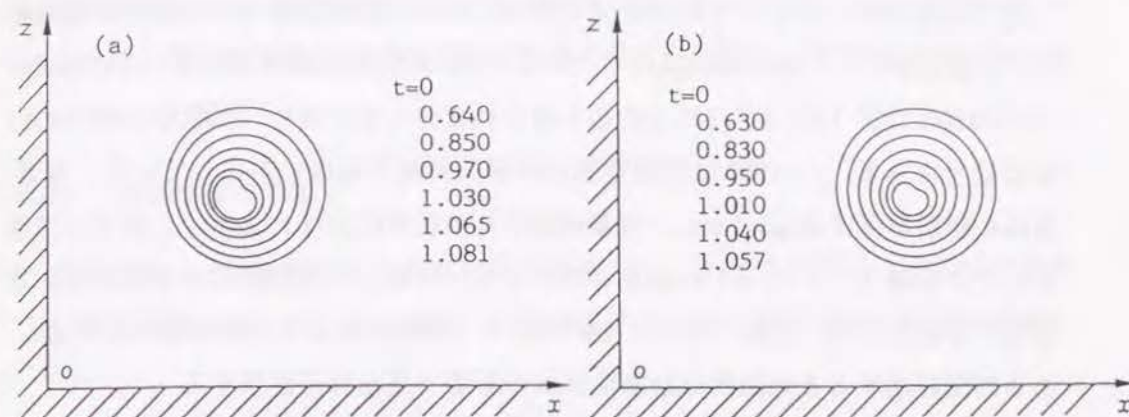


図 5.34 角を持つ剛体壁近傍での蒸気泡の崩壊

$$\dot{R}_{I0}^2 = \frac{1}{\rho(1 + \tilde{\varepsilon} R_{I0}^*)} \left[ \frac{2(p_\infty - p_v)}{3} (R_{I0}^{*-3} - 1) + \frac{2p_{I0}}{3(\gamma - 1)} (R_{I0}^{*-3} - R_{I0}^{*-3\gamma}) + \frac{2\sigma}{R_{I00}} (R_{I0}^{*-3} - R_{I0}^{*-1}) \right] \quad (5.22)$$

ここで、

$$\tilde{\varepsilon} = \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \varepsilon_{IJ}, \quad R_{I0}^* = \frac{R_{I0}}{R_{I00}} \quad (5.23)$$

式 (5.22) は  $\tilde{\varepsilon}=0$  の場合には単一気泡の式に帰着する。式 (5.22) より複数の気泡の場合には  $\tilde{\varepsilon} > 0$  であるため、単一気泡の場合と比べて同一半径での収縮速度は小さくなることがわかる。したがって、崩壊時間は  $\tilde{\varepsilon}$  が大きくなるほど延びることになる。このことは、気泡  $I$  の見かけの無限遠方圧力  $p_{I\infty}$  (有次元) を

$$p_{I\infty} = p_\infty - \rho \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{q_{J0}}{L_{IJ}} \right) \quad (5.24)$$

と定義すると、気泡の収縮が十分激しくなるまでは、 $p_{I\infty} < p_\infty$  であるため、見かけ上、単一気泡の場合と比べて低い圧力上昇のもとで収縮が行われることに対応している。なお、蒸気泡を仮定し、表面張力を無視し、さらに  $\tilde{\varepsilon} \ll 1$  の場合には、気泡の無次元崩壊時間  $T_I$  は式 (5.16) において  $\tilde{\varepsilon}$  を  $\tilde{\varepsilon}$  に置き換えた式で与えられる。



図 5.35 は図中に示すような角度  $\beta$  を持つ二次元的壁面近傍での気泡の崩壊運動により誘起される、剛体壁の頂点  $C$  での圧力  $p_C$  の時間変化を表している。角度  $\beta$  は  $\beta=360^\circ, 180^\circ, 120^\circ, 90^\circ, 72^\circ, 60^\circ$  の 6 通りに変化させており、気泡中心は  $\beta$  の二等分線上にある。 $\beta=360^\circ$  は無限空間内の単一気泡の場合に対応している。なお、気泡の初期半径は  $R_{I00}=1\text{ mm}$ 、非凝縮性気体の初期圧力は  $p_{I0}=0.2$ 、点  $C$  と気泡中心との距離  $L_C$  は  $L_C=8$  に設定されており、粘性の効果は無視されている。本数値計算条件では、気泡の変形は比較的小さく気泡はかなり球形を保って収縮し、ある時間経過すると気泡内非凝縮性気体の影響で気泡は再膨張する。

図 5.35 より気泡運動の周期は  $\beta$  が小さくなるほど延び、剛体壁上での圧力  $p_C$  は  $\beta$  が小さくなるほど高くなることがわかる。気泡の運動周期が延びるのは、 $\beta$  が小さくなるほど、剛体壁の影響を大きく受けるためで、このことは、鏡像の関係から  $\beta$  が小さくなるほど、無限空間内のより多くの気泡群の運動を扱っていることに対応している。点  $C$  での圧力は、並進運動および変形のポテンシャルが球形モードに比べ、より高次のオーダーで減衰するため、ほぼ球形モードによる圧力で決定される。したがって、 $\beta$  が小さくなるほど、点  $C$  での圧力が上昇するのは、並進運動および変形の影響が現れているためではなく、鏡像の位置の気泡の球形モードの影響が加算されているためである。5.4 節の結果を考慮すると、剛体壁に

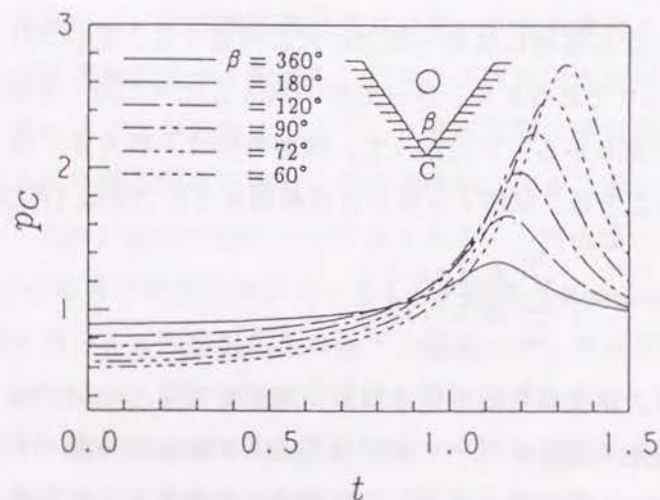


図 5.35 剛体壁頂点での圧力の時間変化

角がある場合にも、気泡変形がそれほど大きくなく気泡がリバウンドするような状況では、凹面剛体壁近傍での気泡の崩壊の場合と同様に、剛体壁での圧力は高くなるものと考えられる。

## 5.6.2 気泡配置の効果

前節で扱った気泡群ではその幾何学的配置から、すべての気泡は同位相で運動し、同じ挙動を示した。ここでは、初期半径は同じでも幾何学的な配置の相違に

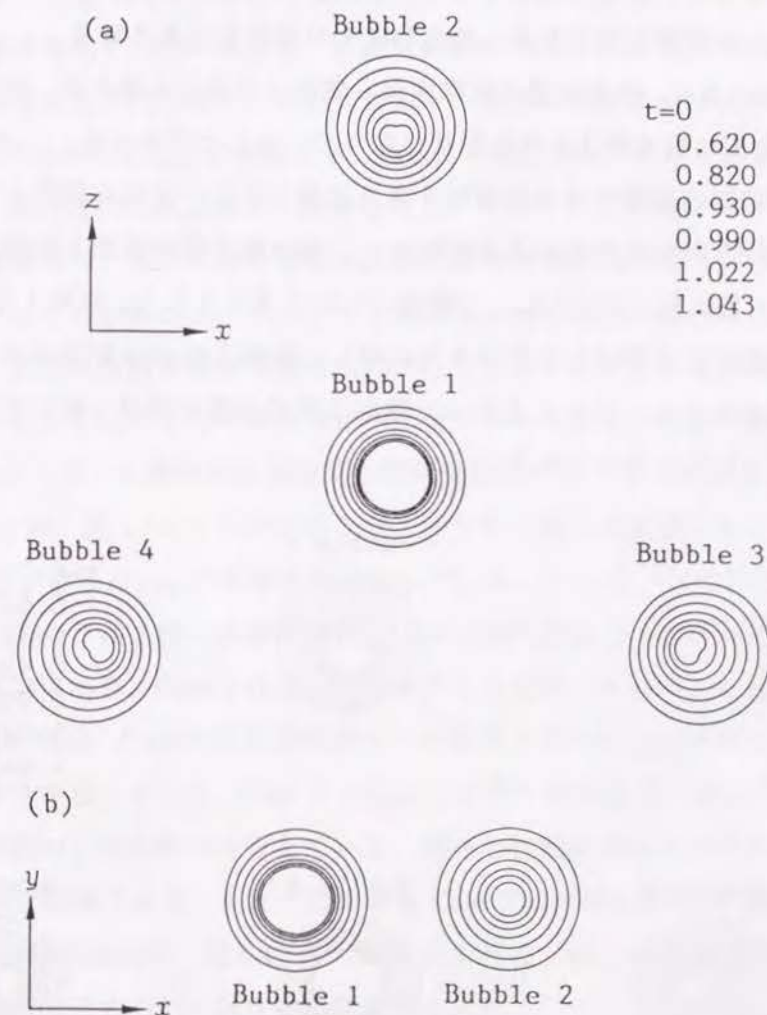


図 5.36 正三角形の頂点と中心に配置された 4 個の蒸気泡の崩壊  
(a)  $x-z$  断面  
(b)  $x-y$  断面



より気泡の運動の位相が変化する場合を取り扱う。その典型的な場合として、気泡が同心円上およびその中心に分布しているような層構造を持つ気泡配置での気泡群の崩壊問題を考える。

図 5.36 は  $x-z$  平面上の正三角形の頂点とその中心に分布している蒸気泡の崩壊の様子である。図 5.36(a) は  $x-z$  面での断面を、図 5.36(b) は図 5.38(a) の気泡 1 または 2 の中心を含む  $x-y$  面での断面を表している。ここで、気泡 1 とその他の気泡との初期気泡間距離は  $L_{1j0}=5$  ( $j=2,3,4$ ) とし、表面張力および粘性の効果は無視されている。なお、図 5.36 の初期気泡配置のもとでは気泡 2～4 は気泡 1 に対して同一の挙動を示すため、気泡 2 にその運動を代表させる。

図 5.36(a) より、気泡配置の対称性から気泡 1 の中心は動かず、気泡形状は気泡 2～4 の方向に引き伸ばされた形状になっていることがわかる。一方、気泡 2～4 は崩壊の初期の段階ではほぼ球形を保ち気泡 1 の中心方向に移動しているが、その後、進行方向の反対側に不安定が生じ、剛体壁近傍の気泡と同様にくぼみを生じている。次に図 5.36(b) の  $x-y$  断面について見てみると、気泡 1 は気泡 3,4 の影響で  $x$  方向に引き伸ばされているのに対し、気泡 2 の  $x-y$  断面はほぼ円を保っていることがわかる。このことから、気泡 2 周辺の流れ場は  $z$  軸に対してほぼ軸対称になっていると考えられる。

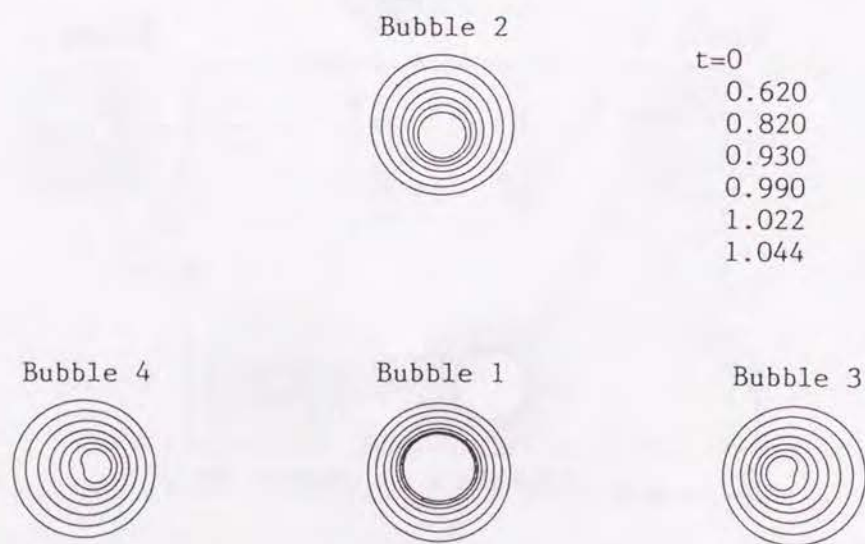


図 5.37 直角二等辺三角形の頂点と斜辺の中点に配置された 4 個の蒸気泡の崩壊

図 5.37 は直角二等辺三角形の頂点とその斜辺の中点に配置された 4 個の気泡の崩壊の様子を表している。気泡 1 と他の気泡との初期気泡間距離ならびにその他の計算条件は図 5.36 と同様である。このような配置では、気泡 3,4 は同じ運動状態をとり、他の気泡と比べて崩壊時間が短くなっていることがわかる。また、気泡 2 は図 5.36 の場合と比べて、崩壊時間が延び、気泡壁のくぼみはいまだ現れていない。気泡 1 は、図 5.36 の場合と比べて  $x$  方向に引っ張られ、気泡中心は気泡 2 の方向にわずかに移動していることがわかる。

図 5.38 に、一辺  $10\sqrt{3}/3$  の立方体の頂点とその中心に配置された 9 個の蒸気泡の崩壊の様子を示す。この場合も、初期気泡配置の対称性から立方体の中心にある気泡は並進運動を行わない。それに対して、頂点にある気泡はすべて同位相で運動し、立方体の中心方向に移動する。頂点にある気泡は、気泡半径が小さくなるにつれて、進行方向の反対側に不安定を生じ、やがてくぼみを生じている。また、気泡の崩壊時間は、気泡の数が増え気泡間の相互作用が強くなるにつれて、さらに延びていることがわかる。中心にある気泡ほど崩壊時間が延びるのは、前述したように、気泡の収縮が緩慢な間は式 (5.24) で定義される見かけの無限遠方圧力が、中心にある気泡ほど他の気泡に比べて低いためである。気泡の崩壊時間の延長は、図 3.2 で示した最低次の気泡群の固有振動数の低下とも符合している。

図 5.39(a) は、図 5.39(b) に示すような 5 通りの初期気泡配置のもとでの、気泡壁上の点  $Q$  での圧力  $p_{Iw}$  の時間変化を表している。ここで、Case 1 は単一球形気泡の場合、Case 2 は 2 個の気泡の場合、Case 3 は一直線上に等間隔に分布している 3 個の気泡の場合、Case 4 は正三角形の 3 つの頂点とその中心に分布している 4 個の気泡の場合、Case 5 は正方形の 4 つの頂点とその中心に分布している 5 個の気泡の場合を表している。Case 2～Case 5 のすべての場合において、初期状態での最小気泡中心間距離は 8 としている。気泡の初期半径およびその他の計算条件は図 5.35 と同様である。また、図 5.40 に Case 5 における点  $Q, Q'$  と気泡中心との距離  $R_I$  の時間変化を、図 5.41 に Case 5 における、中心にある気泡に対する見かけの無限遠方圧力 (式 (5.24)) の時間変化を示す。

図 5.39(a) から 2 個の気泡の場合には、気泡壁での最大圧力は単一気泡の場合とほとんど変わらないが、3 個以上の場合には、気泡の数が増えるにしたがって、気



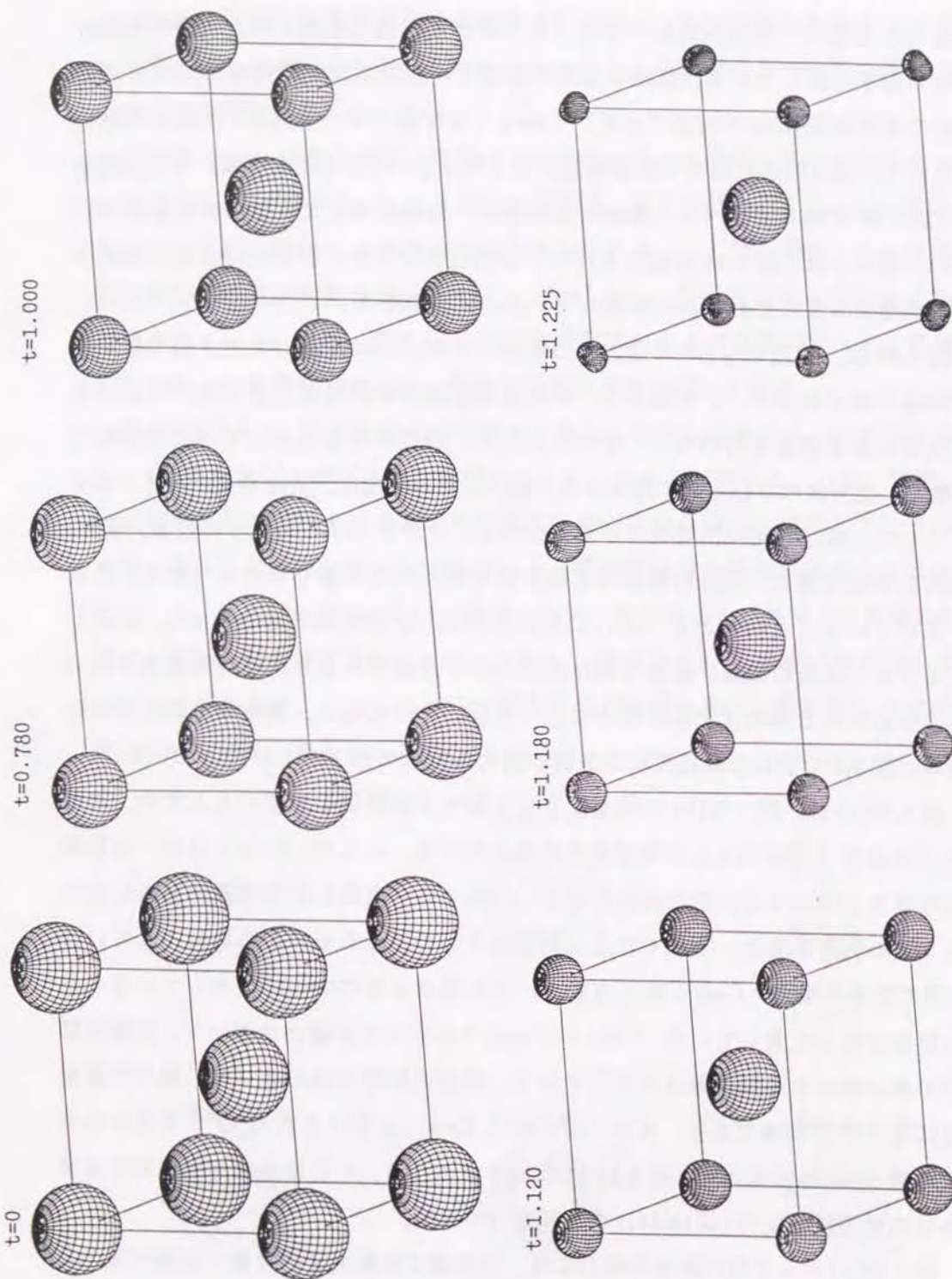


図 5.38 立方体の頂点と中心に配置された9個の蒸気泡の崩壊

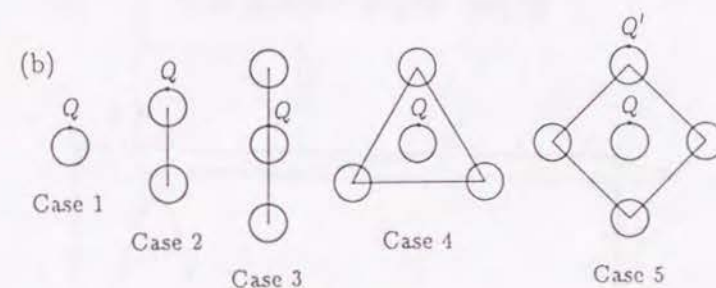
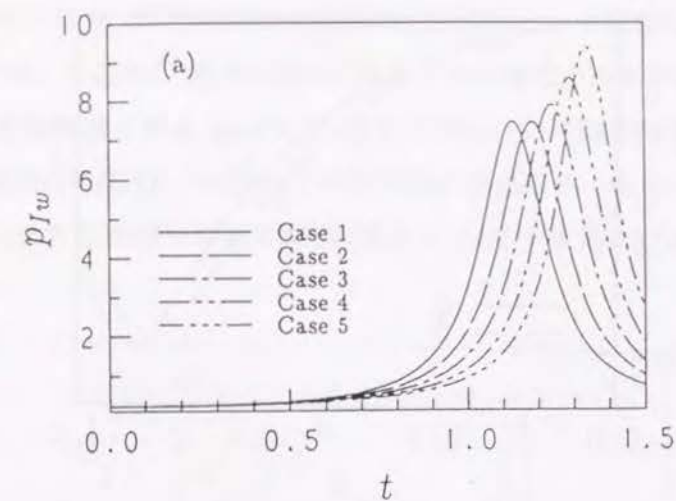


図 5.39 気泡壁圧力の比較  
(a) 圧力の時間変化  
(b) 気泡配置

泡壁での最大圧力が上昇していることがわかる。この原因は次のように説明できる。同じ初期半径の2個の気泡の場合には、2個の気泡の位相は一致しているが、3個以上の場合には、図 5.40 からわかるように、中心にある気泡は他の気泡と比べて運動周期が延びる。そのため、中心にある気泡の収縮は他の気泡が膨張に転じた後にも継続される。頂点にある気泡がリバウンドする前後では、中心にある気泡周辺に、高い圧力場が誘起される。そのため、図 5.41 からわかるように、中心にある気泡の見かけの無限遠方圧力は急速に上昇し、気泡収縮が加速され、それに伴い気泡壁圧力が高くなるものと考えられる。一方、Case 2 の場合のように



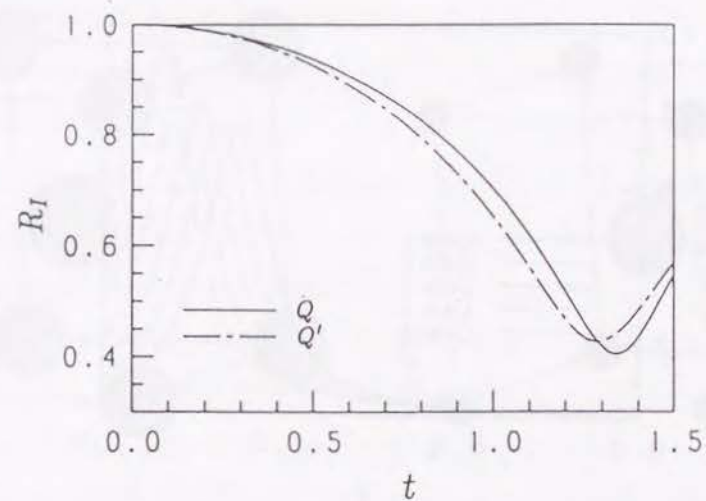


図 5.40 気泡壁の時間変化

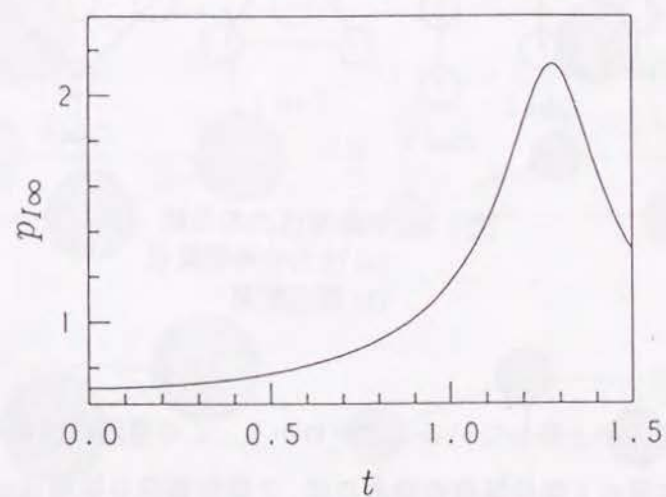


図 5.41 見かけの無限遠方圧力の時間変化

気泡の位相が一致している場合には、式 (5.22) より定義される最小半径 ( $\dot{R}_{I0}=0$  のときの半径) は単一気泡の場合と同じであるから、並進運動および変形の影響が大きい場合には最大圧力も大きく変化しない。なお、本計算条件では、表面

張力の影響は小さく、気泡壁圧力の角度依存性はほとんど認められなかった。

図 5.42(a) は、一辺  $8\sqrt{2}$  および  $16\sqrt{2}$  の正方形の頂点とその中心に配置された 9 個の気泡群の気泡壁上の点  $Q_1, Q_2, Q_3$  での圧力  $p_{Iw}$  の時間変化を、図 5.42(b) は、中心にある気泡 (気泡 1)、一辺  $8\sqrt{2}$  の正方形の頂点にある気泡 (気泡 2)、および一辺  $16\sqrt{2}$  の正方形の頂点にある気泡 (気泡 3) に対する見かけの無限遠方圧力の

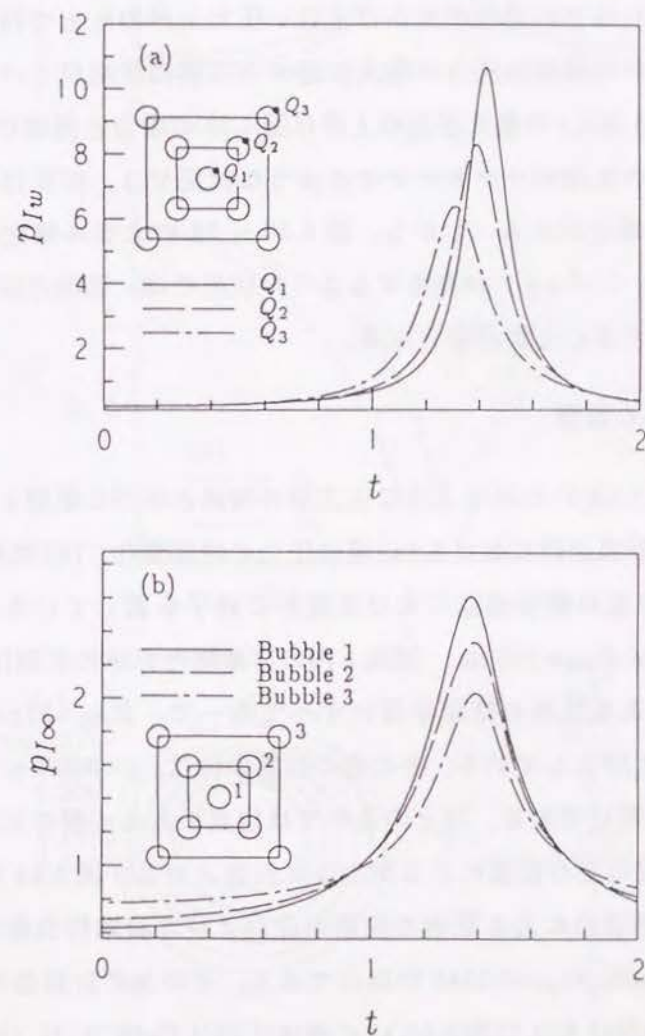


図 5.42 層状に配置された 9 個のガス気泡  
(a) 気泡壁圧力の時間変化  
(b) 見かけの無限遠方圧力の時間変化



時間変化を表している。用いた計算条件は図 5.39 と同じである。

図 5.42(a) より、中心に近く、相互作用の影響が大きな気泡ほど、気泡壁での最大圧力が上昇していることがわかる。このときの点  $Q_1$  での圧力は図 5.39 の Case 5 以上に上昇しているのに対して、点  $Q_3$  での最大圧力は単一気泡の場合よりも低くなっている。この原因も各層ごとに気泡の位相が異なることによる。最も外側の気泡 3 の最大圧力が単一気泡に比べて低くなるのは、図 5.42(b) からわかるように気泡の収縮のかかりの過程が見かけ上低い圧力上昇のもとで行われ、他の気泡の影響で見かけの無限遠方圧力が最大に達する以前に気泡がリバウンドするためである。一方、気泡 2, 3 の最大圧力の上昇は図 5.39 の場合と同様の理由による。このようにすべての気泡がリバウンドするような状況では、相互作用の影響で最大圧力が上昇する場合がある。しかし、図 5.36 ~ 38 のように気泡変形が大きくなり、やがてマイクロジェットが発生するような状況では、気泡分裂後の圧力場および流れ場を解明することが必要となる。

### 5.6.3 初期半径の影響

図 5.43 は、図 5.43(d) に示すような正方形の頂点と中心に配置された 5 個の気泡の収縮ならびに膨張過程における (a) 液体圧力の時間変化、(b) 気泡壁の時間変化、(c) 頂点にある気泡の膨張過程における変形の様子を表している。中心にある気泡 1 の初期半径は  $R_{100}=100\mu\text{m}$ 、気泡 1 内の非凝縮性気体の初期圧力は  $p_{1g0}=0.15$  である。頂点にある気泡の初期半径はすべて同一で、 $R_{J00}=82\mu\text{m}$ 、 $p_{Jg0}=0.1532$ 、 $L_{1J0}=6$  ( $J=2,3,4,5$ ) としている。その他の計算条件は、 $\nu=9.964 \times 10^{-4}$  としている以外は図 5.39 と同じである。以上の条件では頂点にある 4 個の気泡は同一の挙動を示すため、 $z$  軸の正の位置にある気泡 2 に代表させる。図 5.44 は図 5.43 と同様の配置で、4 個の頂点にある気泡の初期半径および非凝縮性気体の初期圧力がそれぞれ  $R_{J00}=37\mu\text{m}$ 、 $p_{Jg0}=0.1745$  の場合である。その他の計算条件は図 5.43 と同じである。図 5.43(a) および図 5.44(a) の液体圧力は  $Q_1(0, 0, 2)$ 、 $Q_2(0, 0, 8)$ 、 $Q_3(3, 0, 3)$  の三点に対して計算されている。図 5.43(b) および図 5.44(b) の実線は気泡 1 の  $W_1$ 、破線および一点鎖線は気泡 2 の極  $W_2$ 、 $W_3$  における  $R_I$  の時間変化を表している。図 5.43(c) および図 5.44(c) の気泡形状は  $x-z$  平面における断面を表して

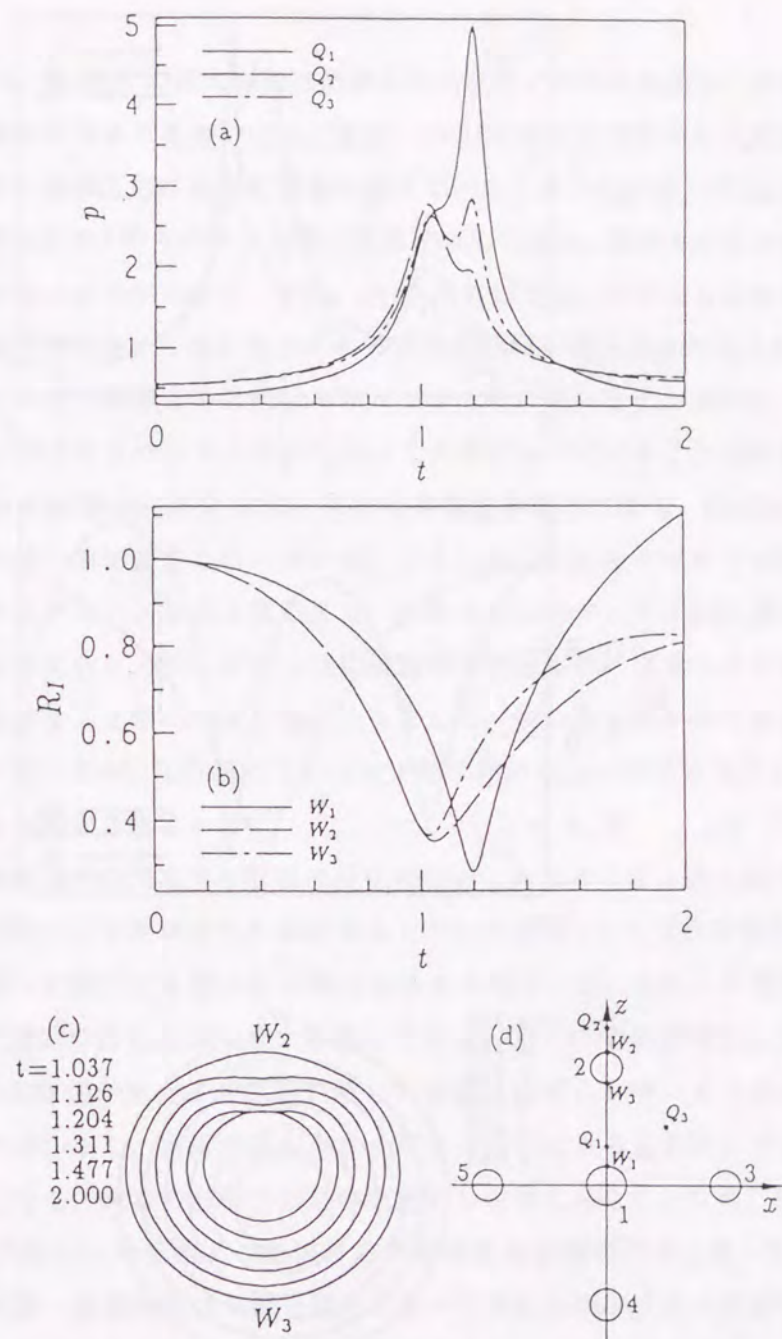


図 5.43 正方形の頂点と中心に配置された 5 個の気泡の挙動 ( $R_{100}=100\mu\text{m}$ ,  $R_{200}=82\mu\text{m}$ ,  $p_{1g0}=0.15$ ,  $p_{2g0}=0.1532$ )  
 (a) 液体圧力の時間変化  
 (b) 気泡壁の時間変化  
 (c) 膨張過程における気泡形状  
 (d) 気泡配置



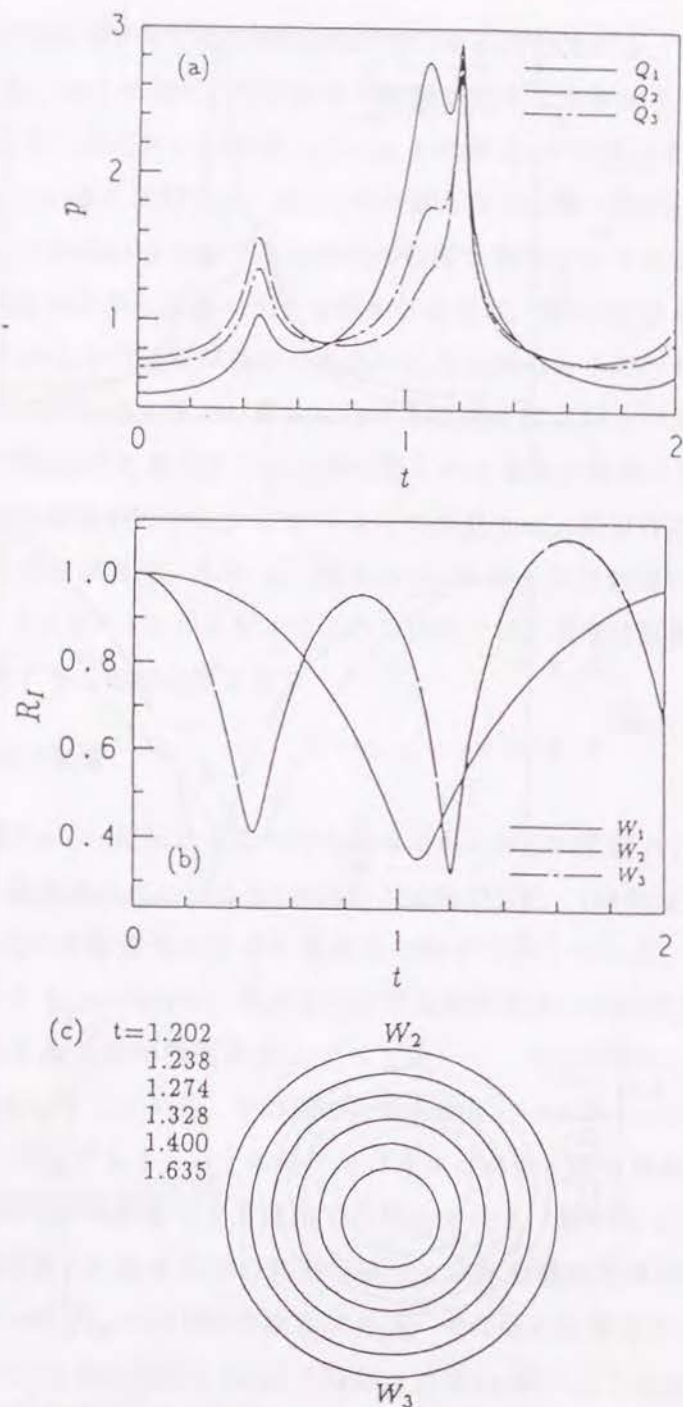


図 5.44 正方形の頂点と中心に配置された 5 個の気泡の挙動  
 $(R_{100}=100\ \mu\text{m}, R_{200}=37\ \mu\text{m}, p_{1g0}=0.15, p_{2g0}=0.1745)$   
 (a) 液体圧力の時間変化  
 (b) 気泡壁の時間変化  
 (c) 膨張過程における気泡形状

いる。

図 5.43 から、点  $Q_1$  での最大圧力は気泡 1 のリバウンド時に発生し、その値は他の二点での最大圧力よりも高いこと、また、 $t=1.03$  付近に頂点にある気泡がそのリバウンド時に液体圧力に及ぼす効果が現れていることがわかる。点  $Q_2$  においては、最大圧力は気泡 2 のリバウンド時に発生してしており、気泡 1 の及ぼす効果はあまり大きくないことがわかる。また、点  $Q_3$  においては、ほぼ同じ値を持つ双方の極大値が現れている。一方、頂点にある気泡の初期半径が小さな図 5.44 の場合には、すべての点で気泡 2 の二回目のリバウンド時に高い圧力が発生し、その値は気泡 2 の一回目のリバウンド時の圧力よりも高くなっていることがわかる。頂点にある気泡の影響は、点  $Q_1$  においてさえも顕著に現れており、点  $Q_3$  においては明らかに気泡 1 の影響をしのいでいる。こうした二回目のリバウンド時に高い圧力が発生するメカニズムは本質的には、前節までに述べた気泡間の運動の位相のずれが影響しており、図 5.44 のように複数個の気泡が同時に高い圧力を発生す場合には、後述する 2 個の気泡の場合にもまして、強い衝撃波が発生する可能性を示唆している。なお、二回目のリバウンド時に高い圧力が発生することは最近、実験によっても確認されている<sup>(13)</sup>。

次に、気泡膨張時の気泡 2 の形状の変化について見てみると、図 5.43 の条件では気泡は  $x$  方向に引き伸ばされた形状からしだいに点  $W_2$  にくぼみを生じており、ほぼ球形を保って膨張する図 5.44 の場合と大きく異なっている。この原因も気泡 1 と気泡 2 の運動の位相差が大きく影響しており、図 5.43 の条件では、気泡 2 の点  $W_2$  における膨張が気泡 1 の比較的激しい収縮で妨げられていることが要因として挙げられる。また、気泡半径が小さくなると粘性による変形モードの減衰が大きくなることも、両者の形状の相違の原因として考えられる。なお、図 5.43 の気泡 1 および図 5.44 の気泡 2 の膨張時の気泡半径は初期半径を上回っているが、これは気泡が同一条件における単一気泡に比べて激しく崩壊することが原因である。一般に気泡収縮が激しくなると液体の圧縮性による減衰が重要になってくるが、図 5.43 および図 5.44 の計算条件では圧縮性の効果はあまり顕著に現れない。

図 5.45~5.47 は図 5.45(d) に示すように剛体壁近傍で直線状に配置された 2 個の気泡の収縮・膨張の様子を表している。気泡 1 の初期半径は  $1\text{mm}$ 、気泡 2 の初



期半径は  $360\mu\text{m}$  で  $p_{1g0}=0.12$ ,  $p_{2g0}=0.1226$  としている。初期状態における剛体壁と気泡1との距離  $L_{C1}$  は  $L_{C1}=5$ , 図5.45~5.47における剛体壁と気泡2との距離  $L_{C2}$  はそれぞれ, 1,  $5/3$ , 2としている。図の(a)~(c)は, それぞれ, 気泡2の一回目の収縮過程, 膨張過程, 二回目の収縮過程の形状を表している。なお, 本計算条件では, 気泡1はほぼ球形を保って収縮・膨張し, 気泡2の二回目の収縮の最終段階は, 図5.44の場合と同様に, 気泡1のリバウンドからわずかに遅れて行われる。図5.45~5.47の形状を比較すると, 剛体壁からの距離の違いにより, 気泡の挙動は大きく異なることがわかる。剛体壁に最も近い図5.45の場合には, 気泡2の中心の移動量は小さく, 対称軸の方向に引き伸ばされた形状で, 一回目の収縮および膨張が行われる。その後, 二回目の収縮時には, 剛体壁方向に引き寄せられながら, 剛体壁の反対方向にくぼみを生じている。一方, 図5.46の気泡2は, 気泡1の方向に引き寄せられながら一回目の収縮および膨張を行い, 最大膨張時の変形は三者のなかで最も小さく比較的球形を保っていることがわかる。その後, 二回目の収縮時には, 図5.45に比べて気泡体積が小さくなってから気泡1側にくぼみを生じている。図5.47の場合には, 気泡2は, 明らかに剛体壁よりは気泡1の影響を強く受け, 一回目の収縮時に最も気泡1に引き寄せられている。その後, 膨張時の不安定は, よく知られた剛体壁近傍での挙動とは反対に, 剛体壁側に現れていることがわかる。最大膨張時にも, 剛体壁側のくぼみは維持されており, そのため, 二回目の収縮時における形状はかなり複雑になっている。

図5.48は, 図5.46の場合(実線)ならびに図5.46の条件で気泡2のみが剛体壁近傍に置かれた場合(一点鎖線)の剛体壁の中心Cにおける圧力の時間変化を表している。なお, 図5.46の場合には, 気泡2の二回目の収縮時における変形が大きくなるため, 収縮過程の途中で計算は打ち切られている。両者を比較してみると, 図5.46の気泡2の二回目の収縮時に見られる剛体壁での最大圧力は, 気泡1との相互作用の効果で剛体壁近傍での単一気泡の場合に比べて約3.3倍になっていることがわかる。こうした相互作用による最大圧力の上昇は, 5.6.1節で述べた角を持つ壁面での圧力上昇のメカニズムとは異なり, 5.6.2節で示したような, 位相の違いにより気泡が単一気泡の場合と比べて激しく収縮することが原因となる。

図5.49(a)~(c)に図5.49(e)に示すような, 平面剛体壁近傍での2個の気泡の収

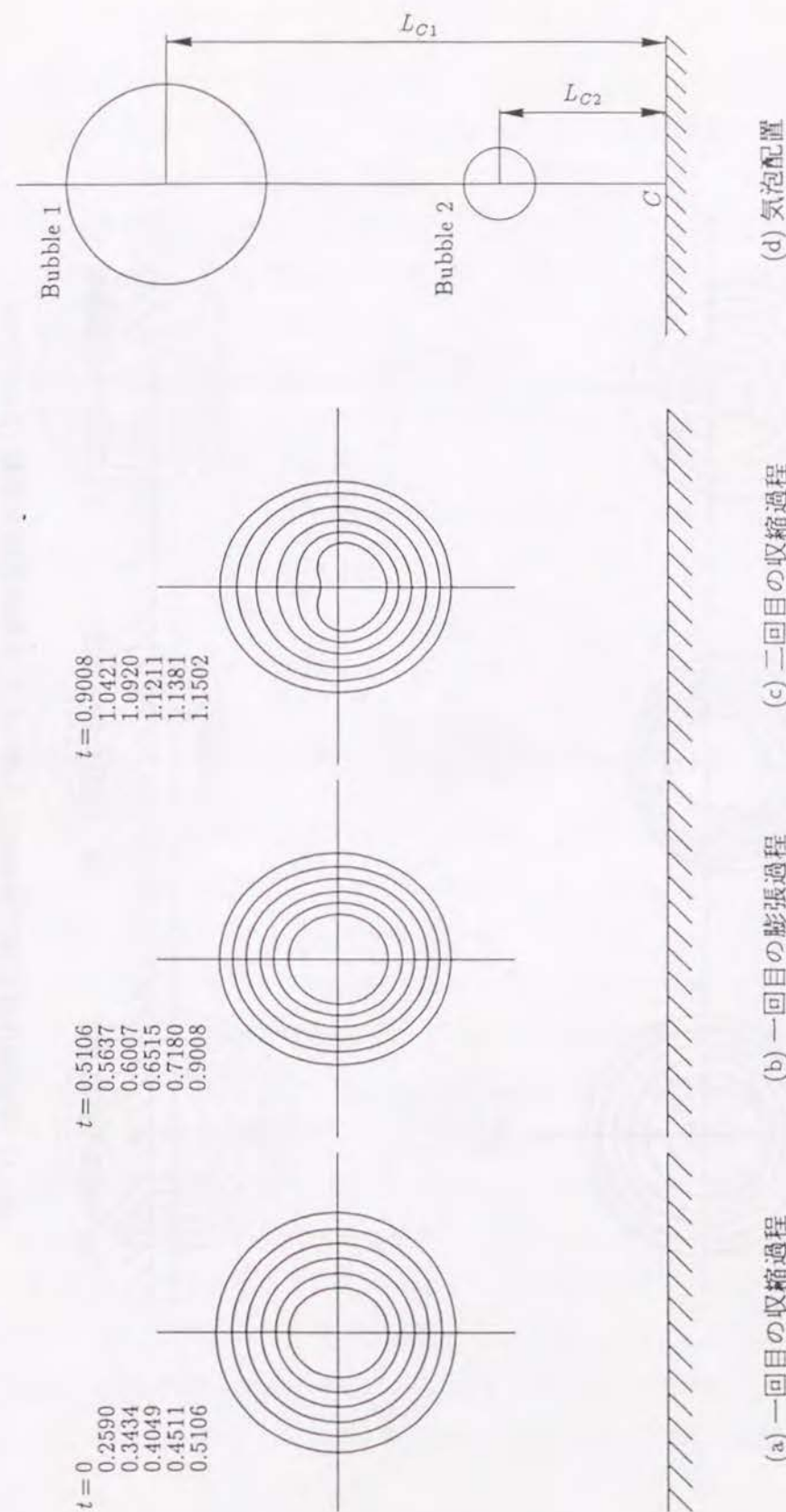
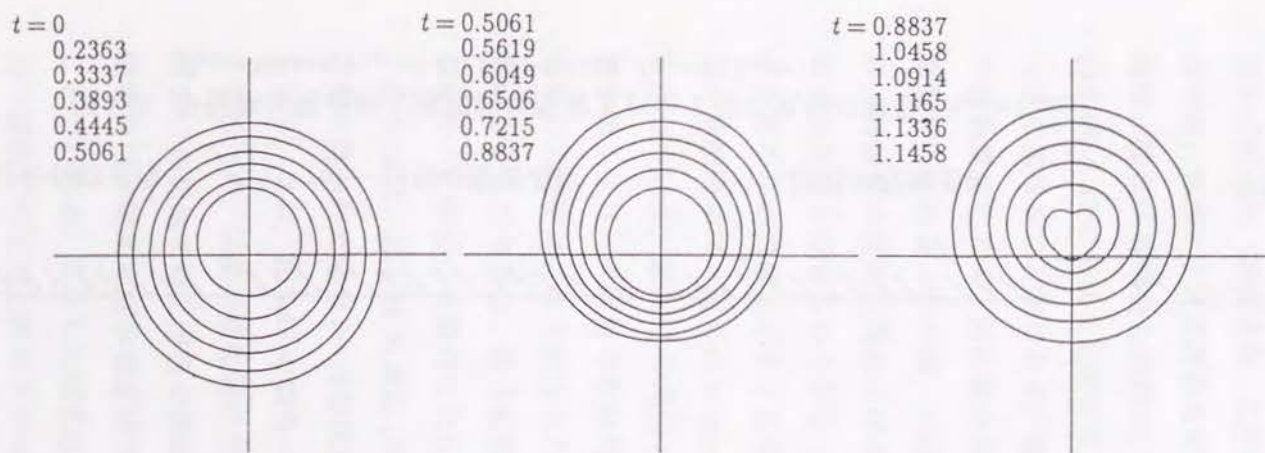


図 5.45 平面剛体壁近傍で直線状に配置された2個の気泡の挙動 ( $R_{100}=1\text{ mm}$ ,  $R_{200}=360\mu\text{m}$ ,  $p_{1g0}=0.12$ ,  $p_{2g0}=0.1226$ ,  $L_{C1}=5$ ,  $L_{C2}=1$ )



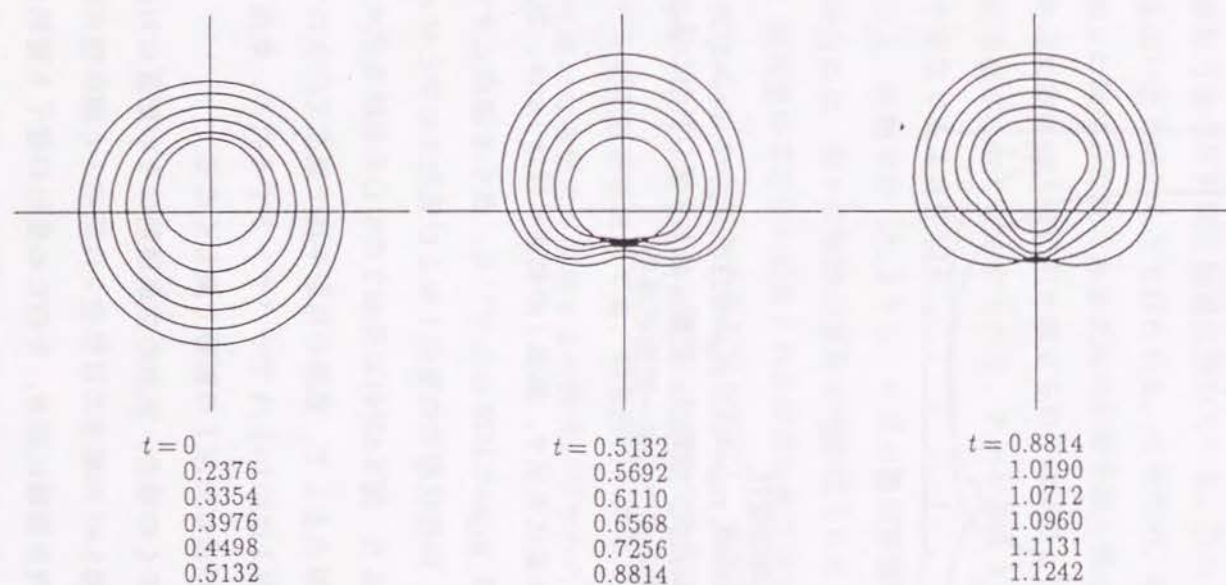


(a) 一回目の収縮過程

(b) 一回目の膨張過程

(c) 二回目の収縮過程

図 5.46 平面剛体壁近傍で直線状に配置された 2 個の気泡の挙動 ( $R_{100}=1$  mm,  $R_{200}=360$   $\mu$ m,  $p_{1g0}=0.12$ ,  $p_{2g0}=0.1226$ ,  $L_{C1}=5$ ,  $L_{C2}=5/3$ )



(a) 一回目の収縮過程

(b) 一回目の膨張過程

(c) 二回目の収縮過程

図 5.47 平面剛体壁近傍で直線状に配置された 2 個の気泡の挙動 ( $R_{100}=1$  mm,  $R_{200}=360$   $\mu$ m,  $p_{1g0}=0.12$ ,  $p_{2g0}=0.1226$ ,  $L_{C1}=5$ ,  $L_{C2}=2$ )



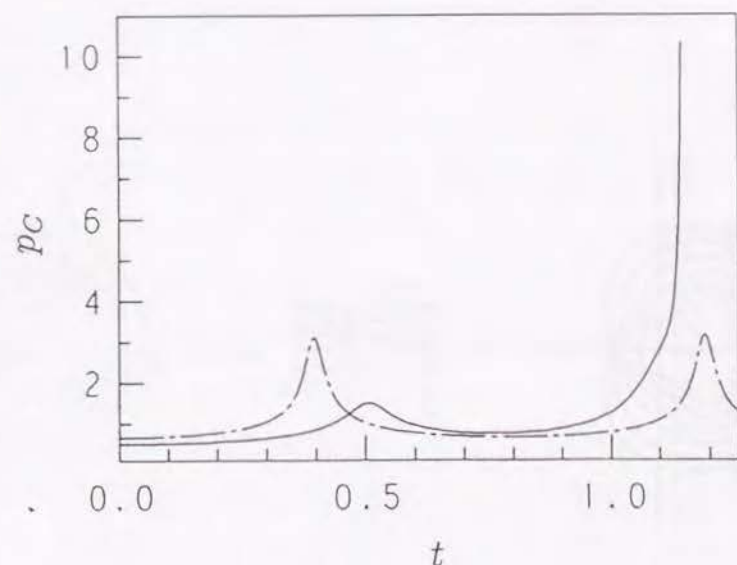


図 5.48 剛体壁中心の圧力の時間変化

( $R_{100}=1\text{mm}$ ,  $R_{200}=360\mu\text{m}$ ,  $p_{1g0}=0.12$ ,  $p_{2g0}=0.1226$ ,  $L_{C1}=5$ ,  $L_{C2}=5/3$ )

実線: 平面剛体壁近傍で直線状に配置された 2 個の気泡の場合  
一点鎖線: 平面剛体壁近傍での単一気泡の場合

縮・膨張における気泡 2 の形状の変化を示す。気泡 1 の初期半径は  $1\text{mm}$ 、気泡 2 の初期半径は  $360\mu\text{m}$  で  $p_{1g0}=0.15$ ,  $p_{2g0}=0.1526$  としている。点  $C$  を原点とするデカルト座標系  $x-z$  を定義すると、初期状態での気泡 1 および気泡 2 の中心は  $o_1(0, 0, 4)$ ,  $o_2(2.5\sqrt{3}, 0, 1.5)$  である。また、図 5.49(d) に気泡 2 の中心の軌跡を示す。図 5.49(d) の座標は初期気泡中心を原点として、気泡の初期半径で無次元化されている。なお、図 5.49 の条件では気泡 1 は約  $t=1.14$  でリバウンドするため、気泡 2 の二回目の収縮は図 5.44 の場合と同様に気泡 1 の影響で激しくなる。

これまで扱った気泡配置では多くの場合、気泡の並進運動はその配置の対称性から一方向に限られていたが、図 5.49 の場合には気泡 2 は気泡 1 と剛体壁の影響を同時に受けるため、 $x-z$  平面内を複雑に動き、そのため変形の様子も複雑になる。すなわち、一回目の収縮時には、気泡 2 は気泡 1 と剛体壁の双方から引き寄せられるが、剛体壁の影響の方が勝っているため、気泡 2 は剛体壁側に移動する。その後、気泡 2 が膨張過程に入り、気泡 1 の収縮がしだいに激しくなると、気泡 2

の中心には剛体壁から引き離す方向に流れ場が形成される。そのため、気泡 2 は徐々に気泡 1 の方に引き寄せられ、膨張過程の大半は、ほぼ剛体壁に平行に移動していることがわかる。膨張過程における気泡の変形は、一回目の収縮時の中心の移動方向の反対側に顕著に現れている。気泡 2 の二回目の収縮は気泡 1 の誘起する高い圧力場のもとで行われる。そのため、気泡 2 の二回目の収縮は加速され、気泡 2 の鏡像の位置にある気泡の影響を強く受けることになる。その結果、気泡 2 は急速に剛体壁方向に引き寄せられ、剛体壁と反対側の気泡壁に不安定が生じる。気泡半径が小さくなるにつれて、それが助長され、気泡 2 は剛体壁の反対側にくぼみを生じるようになる。

以上、本節で示したように、半径の異なる複数の気泡が剛体壁近傍に存在する場合には、個々の気泡の挙動は壁面近くにある単一気泡の挙動ほど単純ではなく、気泡壁の不安定が助長される場所は相互作用に大きく依存する。このため、マイクロジェットの発生する方向も変化し、壁面近くで崩壊するすべての気泡がマイクロジェットによる材料損傷の原因になるとは限らないことが明らかとなった。また、壁面近傍においても、相互作用の効果で激しく収縮し、より強い圧力波の発生源になる気泡が存在する可能性が示された。



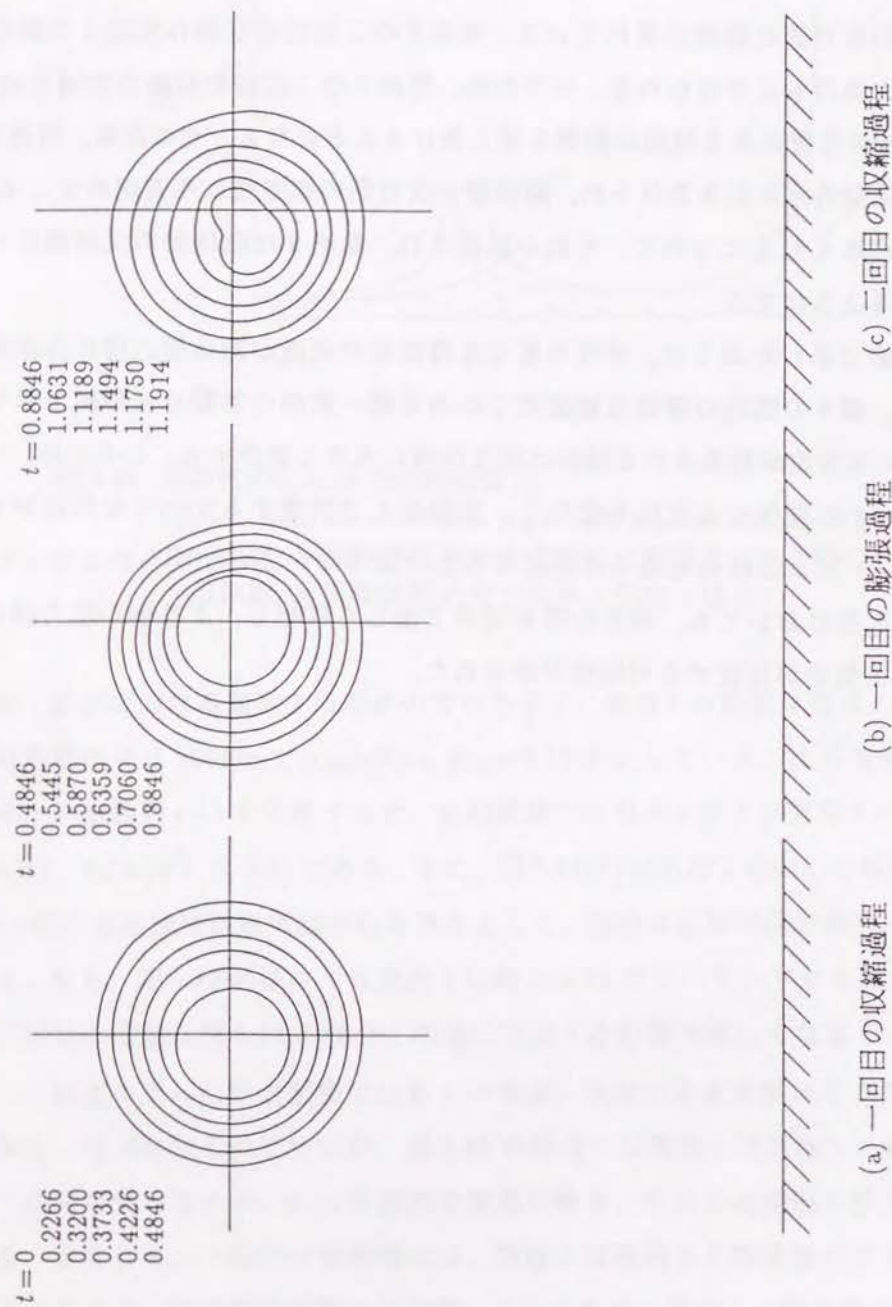


図 5.49 平面剛体壁近傍に配置された 2 個の気泡の挙動  
( $R_{100}=1\text{ mm}$ ,  $R_{200}=360\text{ }\mu\text{m}$ ,  $p_{1g0}=0.15$ ,  $p_{2g0}=0.1526$ )

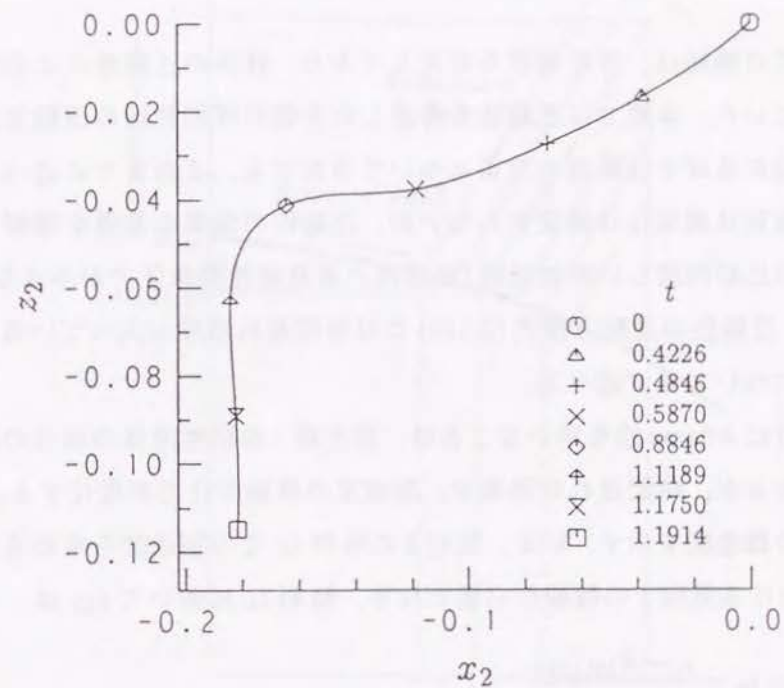


図 5.49 (d) 気泡 2 の中心の軌跡 ( $R_{100}=1\text{ mm}$ ,  $R_{200}=360\text{ }\mu\text{m}$ ,  $p_{1g0}=0.15$ ,  $p_{2g0}=0.1526$ )

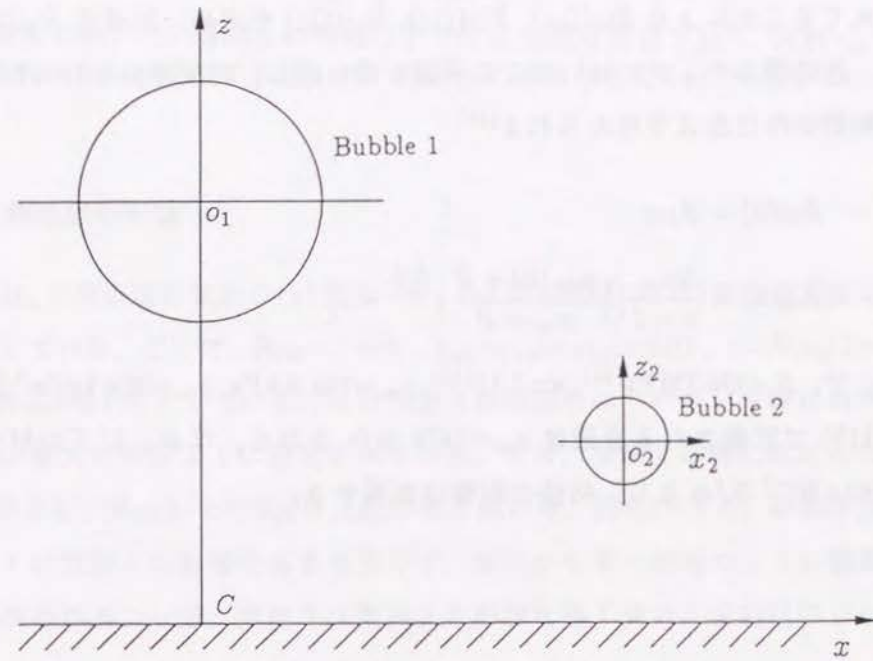


図 5.49 (e) 気泡配置 ( $R_{100}=1\text{ mm}$ ,  $R_{200}=360\text{ }\mu\text{m}$ ,  $p_{1g0}=0.15$ ,  $p_{2g0}=0.1526$ )



## 5.7 圧縮性の効果

前節までの議論は、非圧縮性を仮定しており、液体の圧縮性による減衰の効果は無視していた。本節では圧縮性を考慮した2個の球形気泡の運動方程式を用いて相互作用に及ぼす圧縮性の効果について考察する。これまでに述べたように球形気泡の仮定は現実には満足されないが、圧縮性の効果の本質を理解するために球形気泡の比較的激しい崩壊問題(気泡内の非凝縮性気体圧力が小さな場合)を扱う。なお、圧縮性の運動方程式(2.140)には時間遅れの項が入っているため、その計算方法についてまず述べる。

時間積分にAdams法を用いることは、非圧縮・非粘性流体の場合の運動方程式と同じであるが、時間遅れの効果で、加速度の評価の仕方が変化する。図5.50に時間遅れの概念図を示す。いま、気泡2の時刻 $t_k$ での加速度を求めるためには時刻 $\zeta_{12}$ における気泡1の情報が必要となる。時刻 $t_k$ において $\zeta_{12}$ は

$$\zeta_{12} = t_k - \frac{L - R_{10}(\zeta_{12})}{a_\infty} \quad (5.25)$$

を満足する必要があるが、本計算においては、 $t_k$ 以前のすでに値がわかっている $t_j$  ( $j=1,2,\dots,k$ )の情報の中で、式(5.25)を最も満たす時刻を捜し出し、それを $\zeta_{12}$ にあてることにより $R_{10}(\zeta_{12})$ ,  $\dot{R}_{10}(\zeta_{12})$ ,  $\ddot{R}_{10}(\zeta_{12})$ を求め、加速度 $\ddot{R}_{20}(t_k)$ を計算する。各時間ステップにおいてこの手順を繰り返し、時間積分を行った。

初期条件は次式で与えられる<sup>(14)</sup>。

$$R_{I0}(0) = R_{I00} \quad (5.26)$$

$$\dot{R}_{I0}(0) = \frac{2a_\infty}{\kappa - 1} \left[ \left\{ \frac{p_{Iw}(0) + B}{p_\infty + B} \right\}^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} - 1 \right] \quad (5.27)$$

ここで、 $B=304.7\text{MPa}^{(15)}$ ,  $\kappa=7.15^{(15)}$ ,  $p_\infty=101.3\text{ kPa}$ ,  $\rho_\infty=998\text{ kg/m}^3$ とすると、式(2.119)で定義される音速は $a_\infty=1478\text{ m/s}$ となる。なお、以下の解析では、 $\sigma=7.061\times 10^{-2}\text{ N/m}$ とし、粘性の影響は無視する。

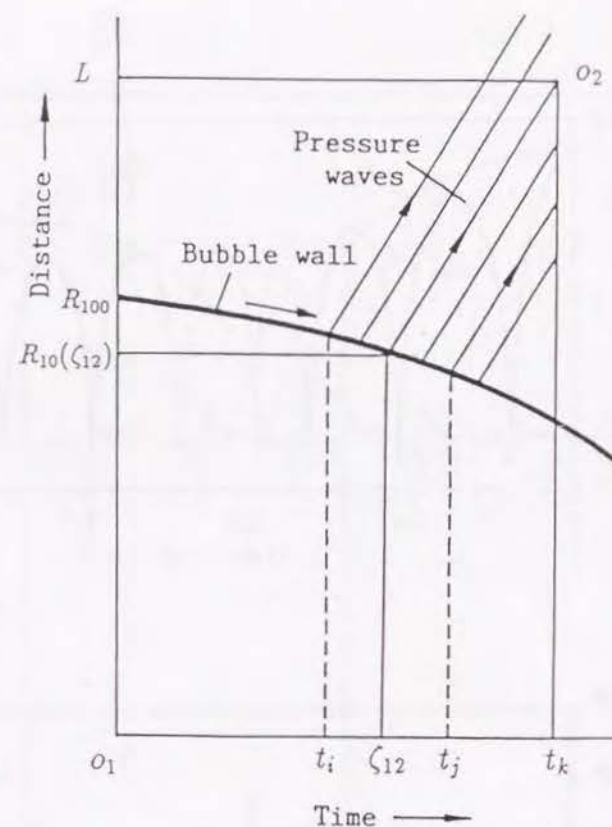


図5.50 時間遅れ

時刻 $t_k$ において、時刻 $t_i$ の情報はすでに $o_2$ を通り過ぎており、時刻 $\zeta_{12}$ の情報がちょうど $o_2$ に到達した。時刻 $t_j$ の情報はまだ $o_2$ に到達していない。

### 5.7.1 初期半径の影響

図5.51は、2個の球形気泡の(a)気泡半径、(b)気泡壁圧力、(c)気泡壁速度の時間変化を表している。ここで、 $R_{100}=1\text{ mm}$ ,  $p_{g0}=p_{1g0}=p_{2g0}=0.01$ ,  $\varepsilon=R_{100}/L=1/3$ ,  $w=R_{200}/R_{100}=0.175$ としている。 $w$ は気泡2の四回目のリバウンド時における気泡壁圧力が最大になるように設定されている。なお、本節では特に断わらない限り、 $\varepsilon=1/3$ とし、 $R_{100}$ および $p_{g0}$ は上記の値を用いる。図5.51より、初期半径の大きな気泡1は気泡2の影響をあまり受けず、あたかも単一気泡のように振舞っていることがわかる。一方、気泡2は気泡1の影響を強く受け、四回目のリバウン



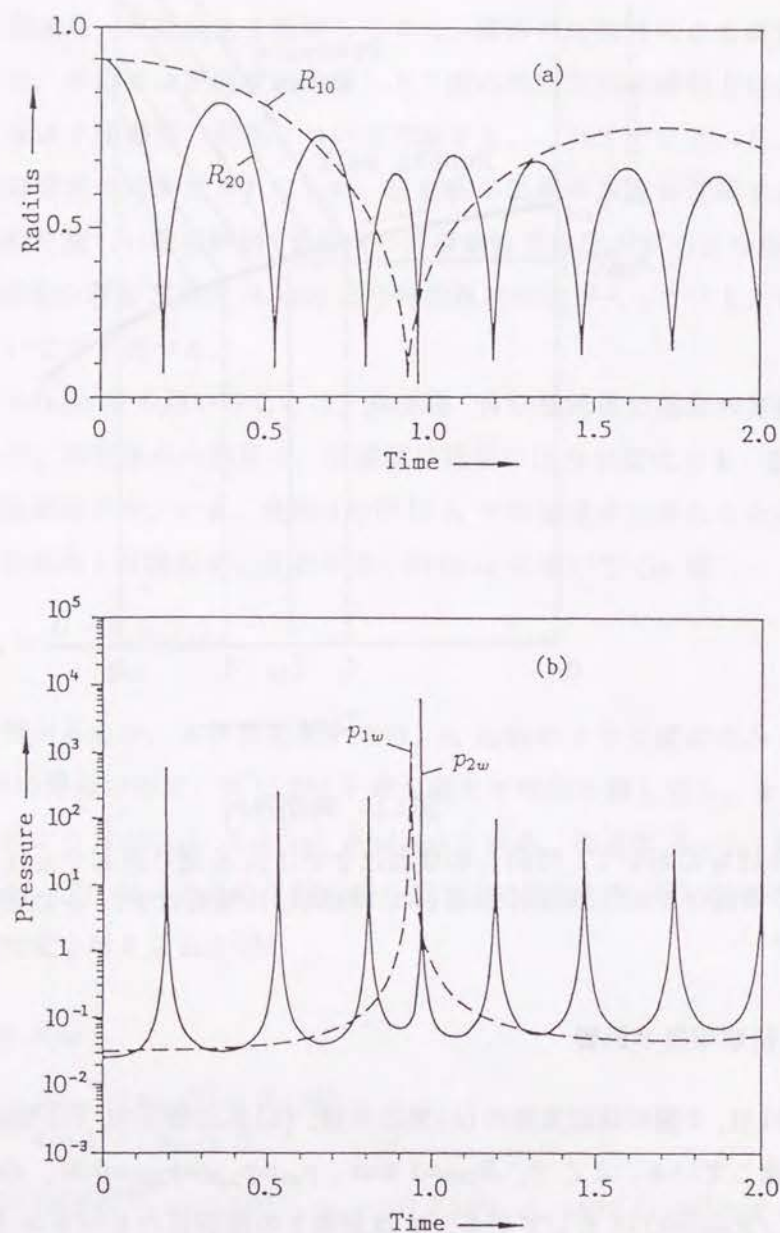


図 5.51 (a) 気泡半径, (b) 気泡壁圧力の時間変化  
( $R_{100}=1\text{ mm}$ ,  $p_{g0}=0.01$ ,  $\epsilon=1/3$ ,  $w=0.175$ )

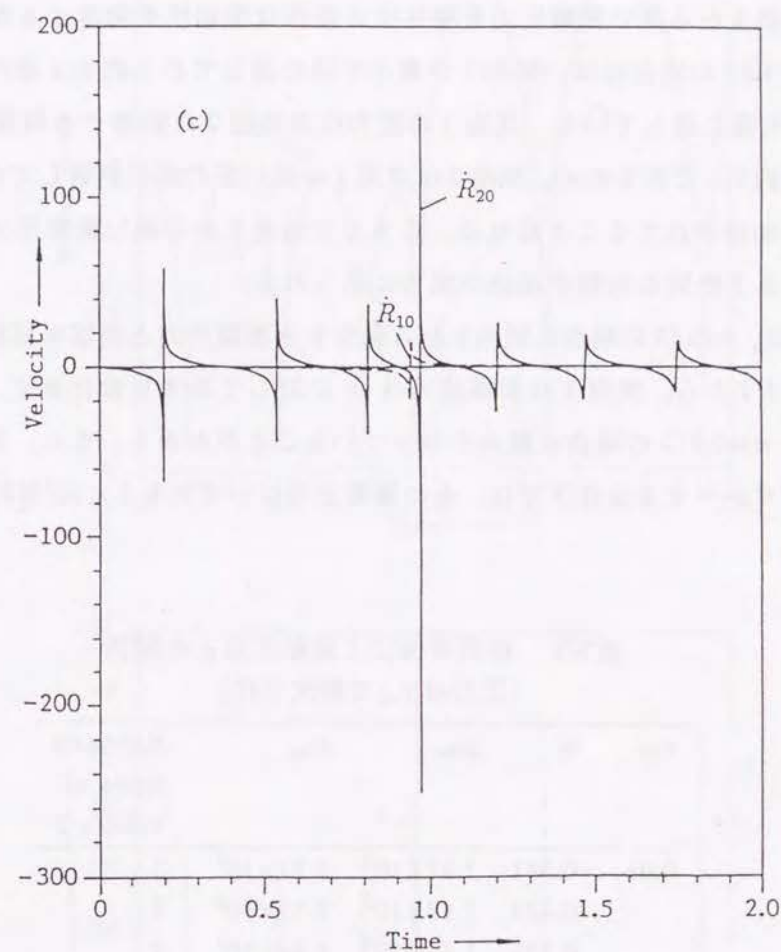


図 5.51 (c) 気泡壁速度の時間変化 ( $R_{100}=1\text{ mm}$ ,  $p_{g0}=0.01$ ,  $\epsilon=1/3$ ,  $w=0.175$ )  
 $\dot{R}_{10}$ は $\sqrt{p_{\infty}/\rho_{\infty}}$ で,  $\dot{R}_{20}$ は $w\sqrt{p_{\infty}/\rho_{\infty}}$ で無次元化されている.

ド時に約  $6.7 \times 10^2 \text{ MPa}$  の高い衝撃的な圧力 (以後, "衝撃圧力" と呼ぶ) を発生している. この圧力は同一条件下の単一気泡から発生する最大衝撃圧力の約 4.5 倍の値となっている. また, その時の気泡 2 の最大収縮速度は Mach 数約 0.3 (無限遠方での液中音速で定義) となっているが, この値は波動近似が適応できる範囲である<sup>(1)</sup>. こうした四回目のリバウンド時に高い衝撃圧力を発生する機構は, 5.6.2 節および 5.6.3 節で述べたように, 気泡間の運動の位相のずれに起因している. ただ



し、圧縮性を考慮した場合には気泡間の情報が伝播するのに時間遅れが存在するため、気泡2から高い衝撃圧力を発生する条件は圧縮性を考慮するか否かで変化する。図5.51の場合には、気泡1が最小半径に達してから約 $3\mu\text{s}$ 遅れた後に気泡2が最小半径に達している。気泡1の圧力波が気泡2に到達する時間は図5.51の条件では約 $2\mu\text{s}$ であるため、気泡2は気泡1の強い圧力波が到着してから約 $1\mu\text{s}$ の間収縮が加速されてることになる。こうした気泡2から高い衝撃圧力を発生する条件は、ある特別な初期半径比の場合に限られる。

表5.2に、 $\varepsilon=1/3$ の場合に気泡2から発生する衝撃圧力と初期半径比との関係を示す。表5.2から、気泡1の衝撃圧力は $w$ に対してあまり変化せず、気泡2の衝撃圧力は $w=0.175$ の場合に最大となっていることがわかる。また、気泡2が二回以上リバウンドする条件下では、その衝撃圧力はいずれも $5 \times 10^2 \text{MPa}$ 以上となっている。

表5.2 初期半径比と衝撃圧力との関係  
(圧力は $p_\infty$ で無次元化)

$p_{g0}$	$w$	$p_{1w}$	$p_{2w}$	Rebound times of bubble 2
0.01	0.381	$1.37 \times 10^3$	$5.27 \times 10^3$	2
	0.234	$1.42 \times 10^3$	$6.31 \times 10^3$	3
	0.175	$1.43 \times 10^3$	$6.64 \times 10^3$	4
	0.140	$1.43 \times 10^3$	$6.63 \times 10^3$	5
	0.117	$1.43 \times 10^3$	$6.25 \times 10^3$	6
0.001	0.253	$2.89 \times 10^4$	$0.984 \times 10^4$	4
	0.207	$2.88 \times 10^4$	$1.04 \times 10^4$	5
	0.178	$2.87 \times 10^4$	$1.06 \times 10^4$	6
	0.156	$2.87 \times 10^4$	$1.07 \times 10^4$	7
	0.139	$2.87 \times 10^4$	$1.04 \times 10^4$	8

次に非圧縮性の結果と圧縮性の結果について比較してみる。図5.52は圧縮性の効果を見放した場合の(a)気泡半径、(b)気泡壁圧力の時間変化を表している。ここで、 $w=0.144$ としている。これは図5.51と同様に、気泡2の四回目のリバウン

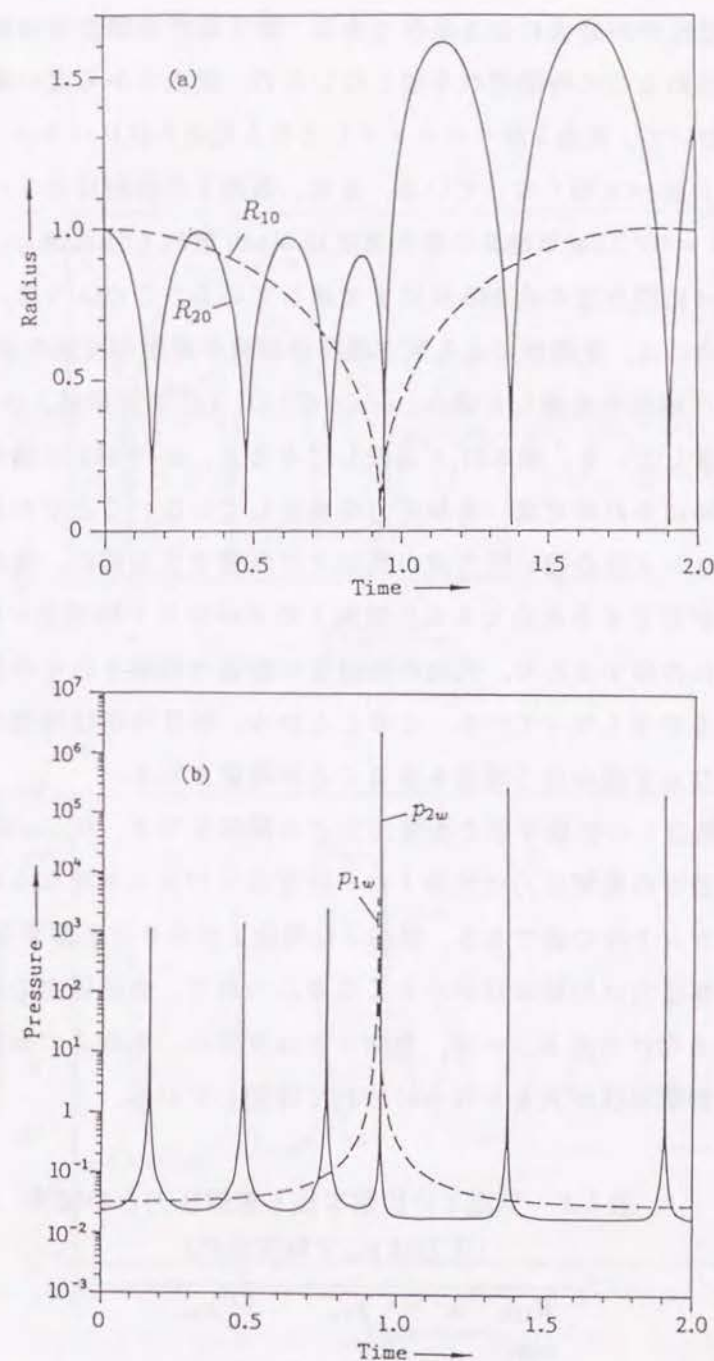


図5.52 (a) 気泡半径, (b) 気泡壁圧力の時間変化  
(非圧縮の場合:  $R_{100}=1 \text{mm}$ ,  $p_{g0}=0.01$ ,  $\varepsilon=1/3$ ,  $w=0.144$ )



ド時の気泡壁圧力が最大になる条件である。非圧縮性の場合には相手の気泡の運動の情報が伝わるのに時間遅れを要しないため、気泡2から高い衝撃圧力を発生する条件において、気泡1がリバウンドしてから気泡2がリバウンドするまでの時間は図5.51に比べて短くなっている。また、気泡2の四回目のリバウンド時の衝撃圧力は $2.5 \times 10^2 \text{ GPa}$ (気泡2の最大速度はMach数約4.8)に達し、その後の再膨張時の半径は初期半径の約160%にまで達している。このように、気泡が激しく収縮する場合には、圧縮性による気泡運動の減衰が重要な役割を示すことになる。

図5.53は圧縮性を考慮した場合( $w=0.162$ )の、(a)気泡半径、(b)気泡壁圧力の時間変化を表している。図5.51と比較してみると、 $w=0.162$ の場合には四回目のリバウンド時にそれほど高い衝撃圧力を発生していないことがわかる。これは気泡1のリバウンド時の強い圧力波が気泡2に到達する以前に、気泡2の四回目のリバウンドが完了するためである。気泡1のリバウンド時の強い圧力波は気泡2の膨張過程に作用するため、気泡の四回目の膨張は抑制されその後の気泡振動の振幅は著しく小さくなっている。このことから、相互作用は気泡の運動を強め合う場合のみならず弱め合う場合もあることが確認される。

表5.3に気泡1の初期半径と衝撃圧力との関係を示す。 $R_{100}=10, 1, 0.3 \text{ mm}$ としている。表中の衝撃圧力は気泡1の一回目のリバウンド時ならびに気泡2の四回目のリバウンド時の値である。気泡2は気泡1に大きな影響を及ぼさないため、気泡1の衝撃圧力は初期半径が小さくなるにつれて、表面張力の影響でわずかに増加しているだけである。一方、気泡1とは反対に、気泡2の衝撃圧力は相互作用の効果で初期半径が大きくなるにつれて増加している。

表5.3 気泡1の初期半径と衝撃圧力との関係  
(圧力は $p_\infty$ で無次元化)

$R_{100}$ mm	$w$	$p_{1w}$	$p_{2w}$
10	0.173	$1.42 \times 10^3$	$6.85 \times 10^3$
1	0.175	$1.43 \times 10^3$	$6.64 \times 10^3$
0.3	0.177	$1.45 \times 10^3$	$6.41 \times 10^3$

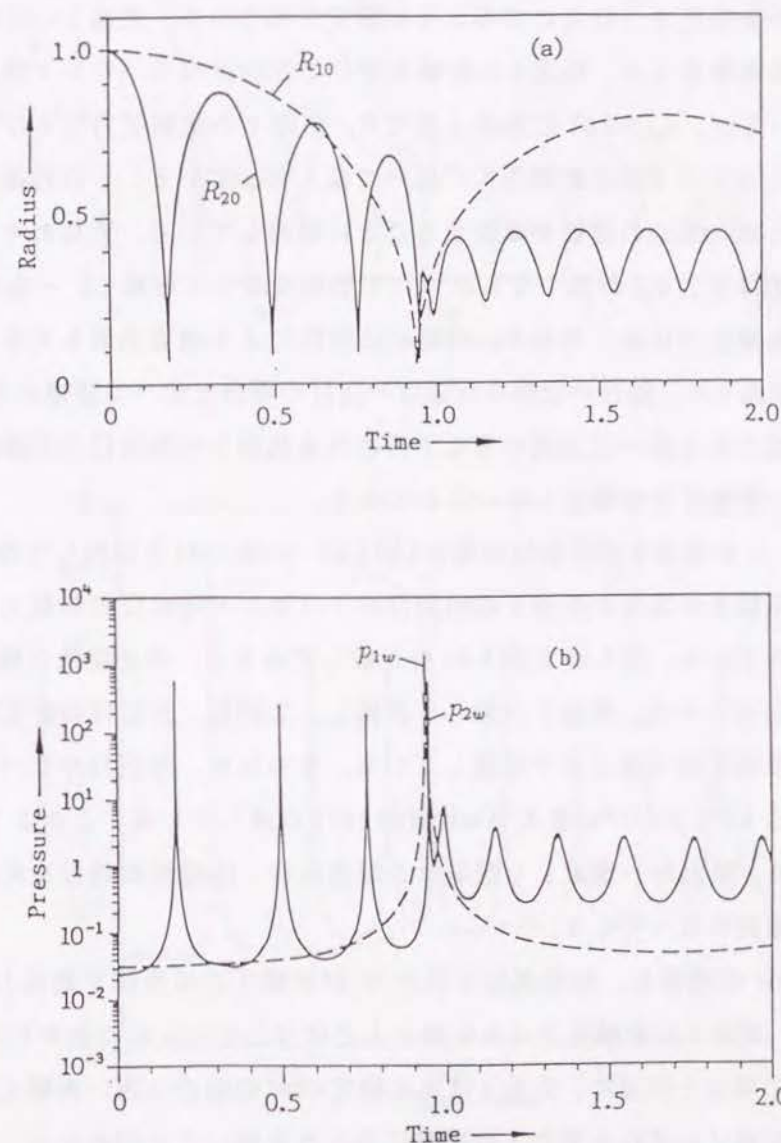


図5.53 (a) 気泡半径, (b) 気泡壁圧力の時間変化  
( $R_{100}=1 \text{ mm}$ ,  $p_{\infty}=0.01$ ,  $\epsilon=1/3$ ,  $w=0.162$ )



### 5.7.2 気泡内気体の影響

図 5.54 は,  $R_{100}=1\text{ mm}$ ,  $p_{g0}=p_{1g0}=p_{2g0}=0.001$ ,  $\varepsilon=1/3$ ,  $w=0.253$  のときの, (a) 気泡半径, (b) 気泡壁圧力の時間変化を表している.  $w$  の値は気泡 2 の四回目のリバウンド時の衝撃圧力が最大になるように設定されている. 気泡 2 の四回目のリバウンド時の衝撃圧力は, 気泡 1 の影響を受けて三回目のリバウンド時に比べて高くなっているが,  $p_{g0}=0.01$  の場合と異なり, 気泡 1 の衝撃圧力ならびに気泡 2 の一回目のリバウンド時の衝撃圧力に比べて低くなっている. この相違は, 液体の圧縮性のために気泡の運動が減衰することに関連している. すなわち, 気泡内の非凝縮性気体圧力  $p_{g0}$  が低くなるにつれて気泡は激しく収縮し, 一回目のリバウンド時の衝撃圧力は高くなるが, 同時に圧縮性による減衰効果も大きくなる. その結果, 気泡 2 の二回目の以降の収縮は一回目の場合と比べて緩慢になり, 気泡 1 により誘起される高い圧力場のもとで行われる気泡 2 の四回目の収縮過程においても, 高い衝撃圧力は発生しないことになる.

ここで, この結果を非圧縮性の場合 (図 5.55:  $w=0.143$ ) と比較してみる. 図 5.55 の  $w$  は非圧縮性の場合に気泡 2 の四回目のリバウンド時の圧力が最大になるように設定されている. 図 5.54 と図 5.55 を比較してみると, 非圧縮性の場合には, 減衰の効果がないため, 気泡 2 は激しく収縮し, 二回目, 三回目の膨張時の半径の極大値もほぼ初期半径にまで回復している. そのため, 四回目のリバウンド時の衝撃圧力は  $1.2 \times 10^5\text{ GPa}$  (最大 Mach 数約 107) に達している. このように,  $p_{g0}$  が小さくなり, 気泡が一層激しく収縮する場合には, 圧縮性の効果を考慮することがさらに重要になってくる.

$p_{g0}=0.001$  の場合に, 初期気泡半径比  $w$  が衝撃圧力に及ぼす効果 (表 5.2) を見てみると, 気泡 1 の衝撃圧力は  $w$  にほとんど依存していないことがわかる. 一方,  $p_{g0}=0.01$  の場合と同様に, 気泡 2 はある特定の  $w$  の場合に高い衝撃圧力を発生するが, その値はいずれも気泡 1 の衝撃圧力よりも低いことがわかる. また, 気泡 2 の衝撃圧力が最大になる時の  $w$  の値は,  $p_{g0}=0.01$  の場合は  $w=0.175$ ,  $p_{g0}=0.001$  の場合は  $w=0.156$  となっており, 気泡 2 の衝撃圧力が最大になる  $w$  の値は  $p_{g0}$  に依存していることがわかる.

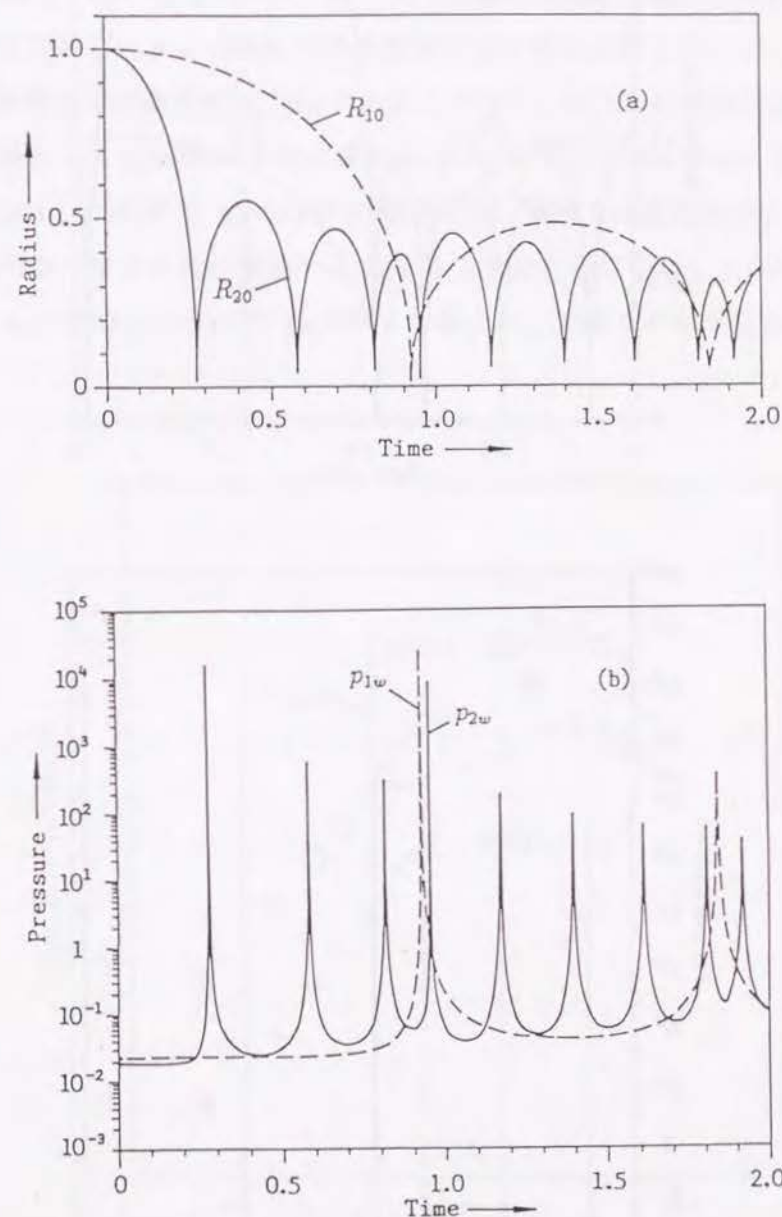


図 5.54 (a) 気泡半径, (b) 気泡壁圧力の時間変化  
( $R_{100}=1\text{ mm}$ ,  $p_{g0}=0.001$ ,  $\varepsilon=1/3$ ,  $w=0.253$ )



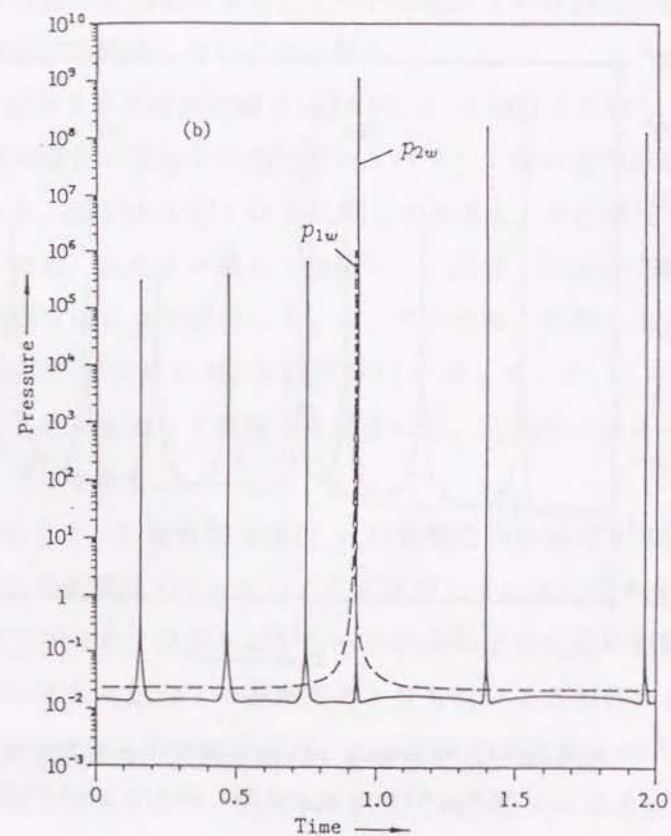
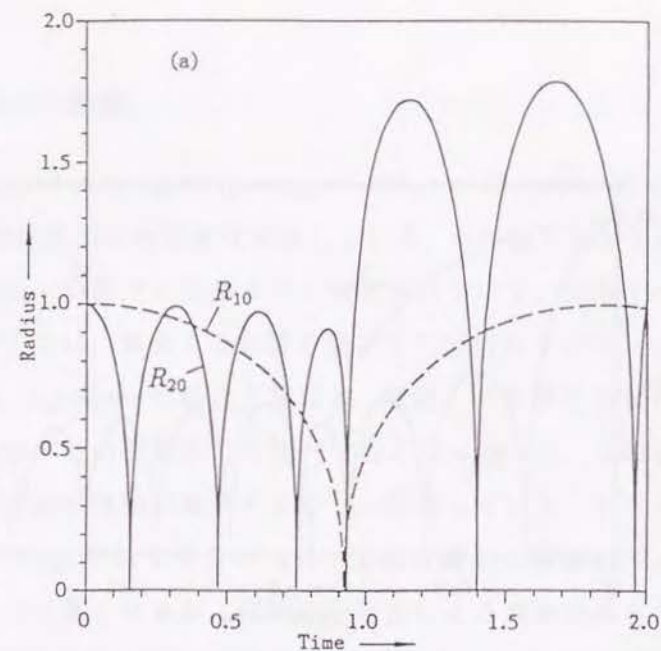


図 5.55 (a) 気泡半径, (b) 気泡壁圧力の時間変化  
(非圧縮の場合:  $R_{100}=1\text{ mm}$ ,  $p_{g0}=0.001$ ,  $\epsilon=1/3$ ,  $w=0.143$ )

図 5.56 に気泡 2 の四回目のリバウンド時の衝撃圧力と気泡内の初期気体圧力  $p_{g0}$  との関係 ( $\epsilon=1/3, 1/5$ ) を示す. 図 5.56 の縦軸の衝撃圧力は, 単独に存在する気泡 2 の一回目のリバウンド時における最大圧力で無次元化している. この図より気泡 2 の衝撃圧力の最大値は,  $p_{g0}$  に大きく依存し,  $\epsilon=1/3$  の場合には  $p_{g0}=0.03$ ,  $\epsilon=1/5$  の場合には  $p_{g0}=0.04$  の時に最大になっていることがわかる. また,  $\epsilon=1/3$  で  $p_{g0}<0.003$ ,  $\epsilon=1/5$  で  $p_{g0}<0.007$  の場合には, 気泡 2 は圧縮性による減衰の効果で単一気泡の場合に比べて高い圧力を発生することはないことが確認される.  $\epsilon=1/3$  で  $p_{g0}>0.03$ ,  $\epsilon=1/5$  で  $p_{g0}>0.04$  の場合に, 気泡 2 の衝撃圧力の最大値が

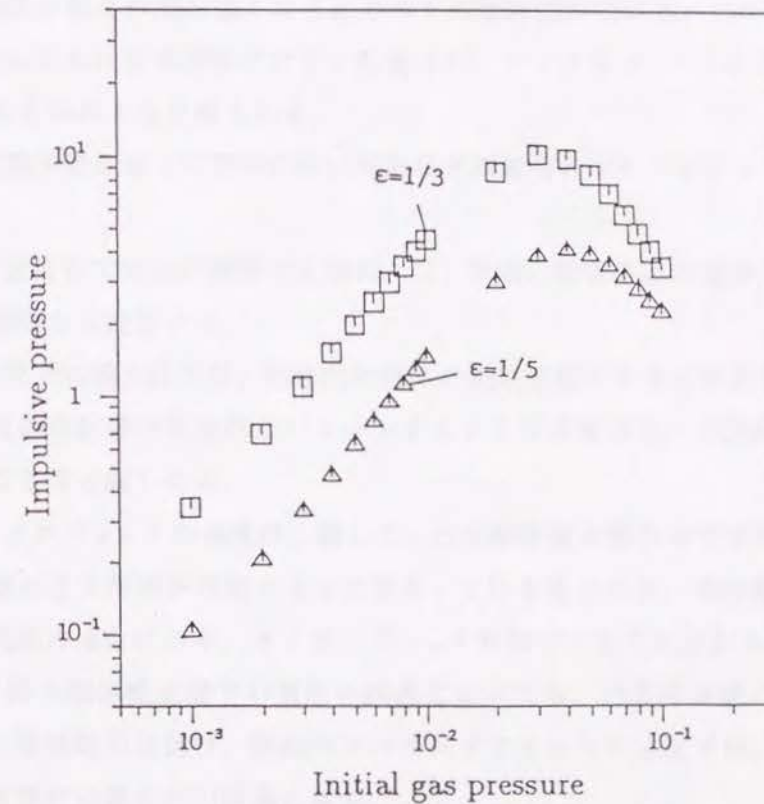


図 5.56 4 回目のリバウンド時の衝撃圧力と初期気体圧力 ( $p_{g0}$ ) との関係



減少するのは  $p_{g0}$  が大きくなると、気泡運動が緩慢になり、発生圧力そのものが小さくなることによる。

なお、真田ら<sup>(16)</sup>は磁歪振動子の表面近傍の気泡群から多数の強い衝撃波を観測し、その発生原因を、衝撃波の発生源近くに存在する気泡群が衝撃波の作用を受けてさらに激しく崩壊するためと推論しているが、本節ならびに5.6節で述べた気泡群を構成する各気泡の運動の位相の相違に起因する気泡壁圧力ならびに液体圧力の上昇機構は、真田らの推論に対して理論的根拠を与えるものとなる。

## 5.8 結 言

本章では、第2~4章で得られた気泡群の運動方程式および境界要素法の関係式を用いて、気泡周囲の液体圧力が初期の平衡圧力からステップ状に上昇あるいは低下するときの気泡の崩壊問題および成長問題を解析した。本章で得られた結果を以下に示す。

(1) 第2, 3章で得られた気泡の運動方程式を、平面剛体壁近傍での気泡の崩壊問題に適用した結果、本理論は境界要素法による結果と比較して、崩壊の最終段階を除いてよく一致する。

(2) 本理論は並進移動速度が大きくなると変形を大きめに評価する傾向にあるが、短い計算時間で気泡の挙動を扱える利点がある。

(3) 気泡間の相互作用が強くなるにつれて崩壊時間が延びる。

(4) 気泡の変形は並進運動に大きく影響され、マイクロジェットの方は気泡の並進運動の方向により見積られる。

(5) 平面剛体壁に沿った方向に長い気泡ほど崩壊時のマイクロジェットの速度は速くなる。

(6) 凹面壁近傍で気泡が崩壊する場合には、気泡の崩壊時間は延び、気泡は体積が大きな段階から変形する。

(7) 剛体壁での最大圧力は、気泡内の気体の初期状態に大きく依存し、気泡内の非凝縮性気体の影響で気泡がリバウンドするような状況では、凹面剛体壁の曲率が大きくなるほど高くなる。

(8) マイクロジェットの速度は、概して、凸面剛体壁の場合の方が速いが、気泡表面が膨張に至る時間が角度によって異なっている場合には、凹面剛体壁近傍で収縮する気泡の場合にのみ、マイクロジェットが発生する可能性がある。

(9) 角を持つ剛体壁近傍での気泡の崩壊においても、凹面剛体壁の場合と同様に、気泡の崩壊時間は延び、気泡がリバウンドするような状況では、角が鋭くなるほど剛体壁での最大圧力は高くなる。

(10) 平面剛体壁近傍で複数の気泡が崩壊する場合には、気泡壁の不安定が助長される場所は相互作用に依存する。そのため、平面剛体壁近傍ですべての気泡がマイクロジェットによる壁面損傷に関与するとは限らない。



(11) 気泡が同位相で運動する場合には、気泡がリバウンドする際の液体圧力は高くなるが、それは個々の気泡の球形モードの運動による圧力が加算されるためで、個々の気泡の気泡壁圧力は単一気泡の場合と比べてそれほど変化しない。

(12) 個々の気泡の初期半径が異なる場合、または、幾何学的な気泡配置からそれぞれの気泡運動の位相が変化する場合には、相互作用の効果で、ある気泡は激しく崩壊し、気泡壁圧力ならびに液体圧力の最大値が増加する場合がある。逆に、相互作用の効果で気泡の運動が抑制される場合もある。そのため、2個の気泡の崩壊問題において、初期半径の小さな気泡から強い圧力波を発生する条件は、特定の初期半径比の場合に限られる。

(13) 表面張力が大きくなると、気泡の崩壊時間は短くなるが、表面張力が気泡の崩壊形状に及ぼす効果は小さい。

(14) 液体の粘性による減衰効果は高次の変形モードになるほど大きい。

(15) 気泡の崩壊過程においては、相互作用が大きな場合ほど球形モード半径が大きな段階で粘性の効果が現れ、変形が緩和される。

(16) 成長過程では、崩壊過程ほど粘性の効果は現れない。

(17) 高次の変形モードになるほど粘性境界層の影響は大きくなり、粘性境界層が並進運動に及ぼす効果は変形モードに比べて小さい。

(18) 気泡が激しく収縮する場合には、液体の圧縮性による気泡運動の減衰を考慮することが重要である。

## 第5章の参考文献

- (1) Knapp, R. T., et al., *Cavitation*, (1970), McGraw-Hill Book Company.
- (2) Plesset, M. S., and Prosperetti, A., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **9**(1977), 145.
- (3) Guerri, L., et al., *Proc. 2nd Int. Colloq. on Drops and Bubbles*, (1982), 175.
- (4) Lauterborn, W., and Bolle, H., *J. Fluid Mech.*, **72**(1975), 391.
- (5) Chahine, G. L., and Bovis, A. G., *J. Fluids Eng.*, **105**(1983), 356.
- (6) Rayleigh, Lord, *Phil. Mag.*, **34**(1917), 94.
- (7) Chapman, R. B., and Plesset, M. S., *J. Basic. Eng.*, **94**(1972), 142.
- (8) Plesset, M. S., and Chapman, R. B., *J. Fluid Mech.*, **47**(1971), 283.
- (9) Tomita, Y., et al., *Proc. '91 Cavitation Symp.*, **116**(1991), 19.
- (10) 木本・ほか3名, 機論, **52**, B(1986), 3843.
- (11) Byrne, G. D., and Hindmarsh, A. C., *ACM Trans. Math. Software*, **1**(1975), 71.
- (12) Prosperetti, A. and Seminara, G., *Phys. Fluids*, **21**(1978), 1465.
- (13) Testud-Giovanneschi, P., et al., *J. Appl. Phys.*, **67**(1990), 3560.
- (14) Jahsman, W. E., *J. Appl. Mech.*, **35**(1968), 579.
- (15) Cole, R. H., *Underwater Explosions*, (1948), Princeton Univ. Press.
- (16) 真田・ほか3名, 機論, **50**, B(1984), 2275.



## 第6章 音場中での気泡の非線形振動

### 6.1 緒言

本章では、気泡の成長・崩壊問題とならんで、キャビテーション現象における重要な問題の一つである音場中での気泡の挙動について解析する。

音場中での気泡の挙動は、気泡の運動方程式の持つ非線形性から非常に興味深い問題を含んでいる。特に、キャビテーション初生の指標となる音場の振動数の1/2倍のサブハーモニック成分を含む音響キャビテーションノイズの原因の解明は、古くから重要な研究課題となっている<sup>(1)~(8)</sup>。さらに、近年、音響キャビテーションノイズはカオスと呼ばれる決定論的な系から発生する予測不可能な現象<sup>(9)</sup>と密接な関係があることが指摘されている<sup>(10)~(12)</sup>。こうした現実の音響キャビテーションノイズの詳細な発生機構を解明するためには、気泡間の相互作用を考慮した気泡の非線形振動特性を明らかにする必要がある。本章では以上の点を踏まえて、以下の順序で解析を行う。

まず6.2節では、圧縮性液体中での2個の球形気泡の運動方程式を用いて、比較的低い圧力振幅のもとでの気泡の非線形振動特性を解析し、相互作用が周波数応答曲線ならびに音響キャビテーションノイズに及ぼす効果を明らかにする。6.3節では、 $N$ 個の球形気泡の運動方程式を用いて、圧力振幅に対する気泡振動の分岐構造を解析し、相互作用とカオス現象との関係を解明する。6.4節では、気泡変形を考慮した気泡群の運動方程式を用いて、音場中での気泡の安定性に及ぼす相互作用の効果を解析する。

なお、気泡の非線形振動を扱う場合には、前章で述べた気泡の成長・崩壊問題に比べて長い期間にわたって計算を行う必要があるため、その間に気泡内の気体の拡散・熱過程によるエネルギー散逸などの界面現象および内部過程<sup>(13)~(15)</sup>が振動特性に影響を及ぼすことが予想される。また、気泡振動が激しくなると気泡の並進運動・変形の影響も無視できない。しかし、本研究では気泡の非線形振動特性に及ぼす気泡間の相互作用の基本的な性質を解明することを主眼とし、主に球形気泡の理論を用い、界面現象および内部過程は考慮しない。

### 6.2 2個の気泡の非線形振動

#### 6.2.1 問題の設定

本章では気泡周囲の液体圧力が、初期平衡圧力 $p_0$ から、圧力振幅 $p_a$ 、振動数 $f_d$ で正弦波状に変動している状況を考える。このことは3.5節の式(3.84)において

$$\dot{\Phi} = \frac{p_a}{\rho_\infty} \sin 2\pi f_d t \quad (6.1)$$

とおくことに対応している。本節では、式(3.84)において $\Lambda=1$ とし、エンタルピーを式(2.127)のように近似することにより得られる運動方程式(式(2.140))を用いる。用いる気泡の運動方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{2\dot{R}_{I0}(t)}{a_\infty} \right\} R_{I0}(t) \ddot{R}_{I0}(t) + \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{4\dot{R}_{I0}(t)}{3a_\infty} \right\} \dot{R}_{I0}^2(t) \\ & + \frac{1}{\rho_\infty} \left[ p_0 - p_a \sin 2\pi f_d t + \rho_\infty \frac{R_{J0}(\zeta_{JI})}{L} \{ R_{J0}(\zeta_{JI}) \ddot{R}_{J0}(\zeta_{JI}) + 2\dot{R}_{J0}^2(\zeta_{JI}) \} \right. \\ & \left. - p_{Iw}(t) - \frac{R_{I0}(t)}{a_\infty} \frac{d}{dt} \{ p_{Iw}(t) + p_a \sin 2\pi f_d t \} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここで、

$$p_{Iw}(t) = p_v + \left( p_0 - p_v + \frac{2\sigma}{R_{Ie}} \right) \left( \frac{R_{Ie}}{R_{I0}(t)} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_{I0}(t)} - \frac{4\mu \dot{R}_{I0}(t)}{R_{I0}(t)} \quad (6.3)$$

$p_0=p_\infty$ (初期平衡圧力に等しい)、 $R_{Ie}$ は気泡 $I$ の初期平衡半径を表している。いま、改めて

$$p_\infty = p_0 - p_a \sin 2\pi f_d t \quad (6.4)$$

と定義すると、式(6.2)は、あたかも気泡が一様に変動している無限遠方圧力場の中に置かれていることを表していることがわかる。また、駆動圧力( $p_a \sin 2\pi f_d t$ )と相互作用に起因する圧力変化をもとに以下に示す圧力を定義する。

$$p_{Id} = p_a \sin 2\pi f_d t - \rho_\infty \frac{R_{J0}(\zeta_{JI})}{L} \{ R_{J0}(\zeta_{JI}) \ddot{R}_{J0}(\zeta_{JI}) + 2\dot{R}_{J0}^2(\zeta_{JI}) \} \quad (6.5)$$



式(6.5)の $p_{Id}$ は気泡 $I$ に作用する見かけの圧力変動と見なすことができ、第2項が第1項に比べて大きくなると、気泡振動は相互作用に支配されることになる。

気泡の非線形振動は固有振動数と音場の振動数との比に大きく影響するため、まず最初に、圧縮性および粘性を考慮した2個の球形気泡の固有振動数について考える。気泡半径が平衡状態から

$$R_{I0} = R_{Ie}(1 + \tilde{\xi}_I), \quad \tilde{\xi}_I \ll 1 \quad (6.6)$$

と微小振動しているものとし、式(6.2)の線形化を行う。以下に示す無次元量を用い

$$\begin{aligned} t^* &= t\sqrt{p_0/\rho_\infty}/R_{Ie}, \quad \zeta_{JI}^* = \zeta_{JI}\sqrt{p_0/\rho_\infty}/R_{Ie}, \quad R_{I0}^* = R_{I0}/R_{Ie}, \quad w = R_{2e}/R_{Ie}, \\ \varepsilon &= R_{Ie}/L, \quad a_\infty^* = a_\infty/\sqrt{p_0/\rho_\infty}, \quad p_a^* = p/p_0, \quad p_v^* = p/p_0, \\ \mu^* &= \mu/(R_{Ie}\sqrt{p_0\rho_\infty}), \quad \sigma^* = \sigma/(R_{Ie}p_0) \end{aligned} \quad (6.7)$$

式(6.2)の時間遅れ $\zeta_{JI}$ および強制振動項を無視すると、式(6.2)は次のように線形化される。

$$\begin{aligned} &\left\{w^2(1 - \varepsilon^2 w) + \frac{4\mu w(w+1)}{a_\infty}\right\}\tilde{\xi}^{(4)} \\ &+ \left[\frac{w}{a_\infty}(w\tilde{M} + \tilde{N}) + 4\mu\left\{w\left(w + \frac{4\mu}{a_\infty}\right) + \left(1 + \frac{4\mu}{a_\infty}\right)\right\}\right]\tilde{\xi}^{(3)} \\ &+ \left\{w^2\tilde{M} + \tilde{N} + \frac{4\mu}{a_\infty}(1+w)(\tilde{M} + \tilde{N}) + 16\mu^2\right\}\tilde{\xi}^{(2)} \\ &+ \left\{\frac{\tilde{M}\tilde{N}(1+w)}{a_\infty} + 4\mu(\tilde{M} + \tilde{N})\right\}\tilde{\xi}^{(1)} + \tilde{M}\tilde{N}\tilde{\xi} = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

ここで、

$$\tilde{M} = 3\gamma(1 - p_v) + 2\sigma(3\gamma - 1)$$

$$\tilde{N} = 3\gamma(1 - p_v) + \frac{2\sigma}{w}(3\gamma - 1)$$

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_2$$

であり、 $1/a_\infty^2$ を含む微小項は無視した。なお、式(6.8)の“\*”は省略されており、 $\xi$ の上添え字は、無次元時間に関する微分を表している。式(6.8)の解を

$$\tilde{\xi} = e^{\tilde{\lambda}t}$$

と仮定すると、以下に示す $\tilde{\lambda}$ に関する代数方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\left\{w^2(1 - \varepsilon^2 w) + \frac{4\mu w(w+1)}{a_\infty}\right\}\tilde{\lambda}^4 \\ &+ \left[\frac{w}{a_\infty}(w\tilde{M} + \tilde{N}) + 4\mu\left\{w\left(w + \frac{4\mu}{a_\infty}\right) + \left(1 + \frac{4\mu}{a_\infty}\right)\right\}\right]\tilde{\lambda}^3 \\ &+ \left\{w^2\tilde{M} + \tilde{N} + \frac{4\mu}{a_\infty}(1+w)(\tilde{M} + \tilde{N}) + 16\mu^2\right\}\tilde{\lambda}^2 \\ &+ \left\{\frac{\tilde{M}\tilde{N}(1+w)}{a_\infty} + 4\mu(\tilde{M} + \tilde{N})\right\}\tilde{\lambda} + \tilde{M}\tilde{N} = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

2個の気泡の固有振動数は、式(6.9)の解として得られ、 $a_\infty \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow 0$ とすると非圧縮性・非粘性流体中での2個の気泡の固有振動数<sup>(16)</sup>が得られる。

図6.1に $w(=R_{2e}/R_{Ie})$ に対する2個の球形気泡の固有振動数の変化を示す。実線は $\varepsilon=1/5$ 、一点鎖線は $\varepsilon=1/10$ 、点線は $\varepsilon=0$ (単一気泡)の場合を表している。用いた物理定数は表6.1に示されている。ポリトロプ指数は代表的な単一気泡の解析に用いられている値を採用している<sup>(7),(8),(17)~(19)</sup>。図6.1から $f_{1N}$ は初期半径の大きな気泡1に、 $f_{2N}$ は初期半径の小さな気泡2の固有振動数に対応し、 $\varepsilon=1/5$ の場合には $w \geq 0.6$ 、 $\varepsilon=1/10$ の場合には $w \geq 0.8$ 程度になると固有振動数に相互作用の効果が現れることがわかる。なお、 $w=1$ の場合には、 $f_{1N}$ は同じ大きさの2個の気泡が同位相で振動するモードを、 $f_{2N}$ は逆位相で振動するモードを表している。



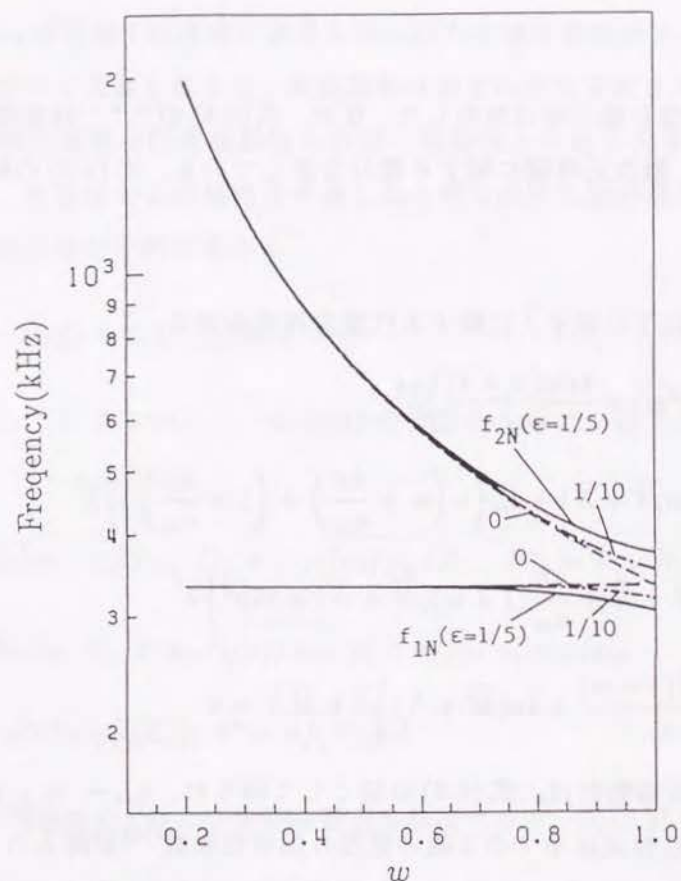


図 6.1 2個の気泡の固有振動数

表 6.1 物理定数

Sound speed in water ( $a_\infty$ )	1478 m/s
Initial equilibrium pressure ( $p_0$ )	101.3 kPa
Saturated vapor pressure of water ( $p_v$ )	2.337 kPa(at 20 °C)
Polytropic index of noncondensable gas ( $\gamma$ )	1.33
Viscosity of water ( $\mu$ )	$1.002 \times 10^{-3}$ Pa·s
Density of water ( $\rho_\infty$ )	998 kg/m <sup>3</sup>
Surface tension (water-saturated water vapor) ( $\sigma$ )	$7.061 \times 10^{-2}$ N/m

一般に、圧縮性および粘性による減衰効果を考慮した場合の  $N$  個の球形気泡の固有振動数(有次元)は、行列

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{E} \\ -\hat{A}^{-1}\hat{B} & -\hat{A}^{-1}\hat{C} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

の固有値の虚数部を求めることにより得られる。ここで、 $\hat{E}$  は  $N \times N$  の単位行列を表している。行列  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  の成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{a}_{II} &= R_{Ie}^5 + \frac{4\mu R_{Ie}^4}{a_\infty \rho_\infty}, \quad \hat{a}_{IJ} = \frac{(R_{Ie} R_{Je})^3}{L_{IJ}} \quad (I \neq J), \\ \hat{b}_{II} &= \frac{R_{Ie}^3}{\rho_\infty} \left\{ 3\gamma(p_0 - p_v) + \frac{2\sigma(3\gamma - 1)}{R_{Ie}} \right\}, \quad \hat{b}_{IJ} = 0 \quad (I \neq J) \\ \hat{c}_{II} &= \frac{4\mu R_{Ie}^3}{\rho_\infty} + \frac{R_{Ie}}{a_\infty} \hat{b}_{II}, \quad \hat{c}_{IJ} = 0 \quad (I \neq J) \end{aligned} \quad (6.11)$$

なお、行列  $\hat{D}$  は式(3.50)の導出と同様の手続きを踏むことにより得られる。



## 6.2.2 計算方法

式(6.2)の時間積分は、時間遅れ $\zeta_{JI}$ を無視し、Adams法を用いて行われた。ここで、時間遅れを無視した効果について考える。いま、気泡1の初期平衡半径が $10\mu\text{m}$ と仮定すると、気泡1の情報が気泡2に到達する時間は長くても $1/(147.8 \times \varepsilon)\mu\text{s}$  ( $> \zeta_{12}$ )となる。一方、気泡2の自由振動の周期は約 $3 \times w \mu\text{s}$  ( $1/f_{2N} \sim w/f_{1N} \sim 3 \times w \mu\text{s}$ ,  $f_{1N} \sim 330 \text{ kHz}$ )であるため、気泡2の自由振動の周期と時間遅れとの比は約 $2 \times 10^{-3}/(\varepsilon w)$ と近似される。そのため、 $\varepsilon, w$ が大きくなるにつれて、時間遅れを無視した効果は小さくなる。なお、 $\varepsilon=1/5$ ,  $w=0.4$ のときには、上記の比は約3%となり、本節で用いた計算条件では最大約4%と見積られる。また、式(6.2)の変動圧力場の時間微分の項

$$\frac{R_{I0}(t)}{a_\infty} \frac{d}{dt} (p_a \sin 2\pi f_d t) \quad (6.12)$$

は単一球形気泡の理論<sup>(20),(21)</sup>では

$$p_a \sin\{2\pi f_d(t + R_{I0}(t)/a_\infty)\} \quad (6.13)$$

を $R_{I0}(t)/a_\infty$ で展開することにより得られる。 $R_{I0}(t)/a_\infty$ の時間のずれは $R_{Ie} \approx 10\mu\text{m}$ の場合、気泡の自由振動の周期に対して約0.2%と見積られるため、本節ではこの影響を無視して計算を行った。

計算は、気泡振動が周期的になるまで行なわれた。周期解か否かの判定条件は、継続する3周期にわたって、対応する気泡半径の最大値および最小値の相対誤差が0.5%以内にあるとき周期解と判定し、強制振動を128周期加えた後にも、この条件を満足しない場合に非周期的と判断した。圧力振幅がそれほど大きくない場合には気泡振動は周期 $T_I$  ( $I=1$ : 気泡1,  $I=2$ : 気泡2)の振動となる。周期 $T_I$ は音場(強制振動)の周期 $T_d$ の整数倍となり、次のように表現される。

$$T_I = mT_d \quad (6.14)$$

さらに周期 $T_I$ はそれぞれの気泡の自由振動の周期 $T_{fI}$  ( $I=1$ : 気泡1,  $I=2$ : 気泡2)の整数倍にもなり

$$T_I = nT_{fI} \quad (6.15)$$

とも表される。ここで、比 $n/m$ はいわゆる共振の次数<sup>(8)</sup>に対応し、 $m=n=1$ の場合には"主共振",  $m=1, n=2, 3, \dots$ の場合には"ハーモニック振動",  $m=2, 3, \dots, n=1$ の場合は"サブハーモニック振動",  $m=2, 3, \dots, n=2, 3, \dots$ の場合には"ウルトラハーモニック振動"を表している。

計算の初期条件は次のように与えた。

$$\begin{aligned} R_{I0}(0) &= R_{Ie} \\ \dot{R}_{I0}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

なお、以下に示す結果は式(6.7)の無次元量を用い、"\*"は省略されている。

## 6.2.3 周波数応答曲線

図6.2は $R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=4\mu\text{m}$ ,  $L=50\mu\text{m}$  ( $w=0.4$ ,  $\varepsilon=1/5$ ),  $p_a=0.4, 0.7$ の場合の2個の気泡の周波数応答曲線を表している。(a),(b)はそれぞれ気泡1および2に対応しており、横軸は音場の振動数 $f_d$ を表し、それぞれの気泡の固有振動数で無次元化されている。縦軸はそれぞれの気泡の最大半径 $R_{I\max}(I=1,2)$ と初期平衡半径 $R_{Ie}$ との差を $R_{Ie}$ で無次元化している。図中の共振のピーク値付近に示した分数は6.2.2節で述べた共振の次数を表している。比較のため、図6.3に $R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=4\mu\text{m}$ の気泡がそれぞれ単独に存在する場合( $\varepsilon=0$ )の周波数応答曲線を示す。図6.2, 図6.3より概して周波数応答曲線は低振動数域に傾き、いくつかの共振にはジャンプ現象が現れていることがわかる。これらは、式(6.2)の非線形性に起因し、圧力振幅が大きくなるほど顕著になる。図6.2と図6.3を比較してみると、初期半径の大きな気泡1は相互作用の効果をあまり受けず、単一気泡と同じような挙動を示している。一方、気泡2の周波数応答曲線には、相互作用の効果が現れ、圧力振幅が大きくなるほど単一気泡との相違が顕著になっている。すなわち、 $p_a=0.4$ および0.7のいずれの場合にも、気泡2の3/1次のハーモニック振動は非常に増幅され、2/1次のハーモニック振動は抑制されている。3/1次のハーモニック振動は、 $p_a=0.7$ の場合には、音場の振動数が低下するにつれて6/2次のウルトラハー



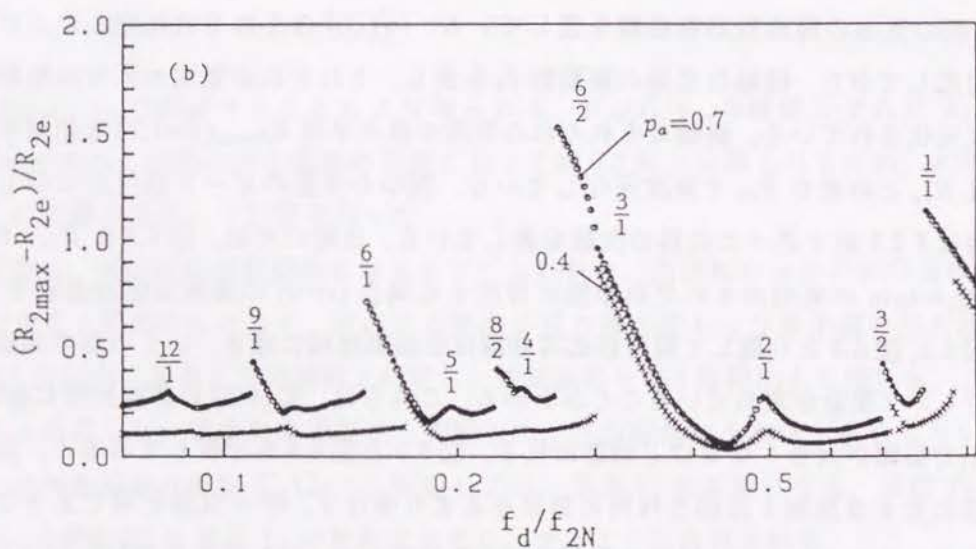
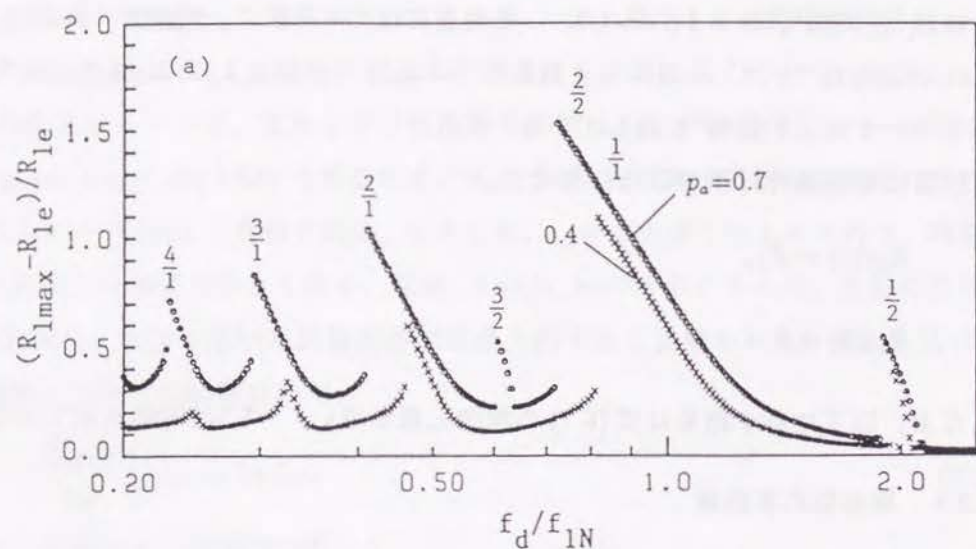


図 6.2 2個の気泡の周波数応答曲線

$R_{1e}=10\ \mu\text{m}$ ,  $\varepsilon=1/5$ ,  $w=0.4$ ,  $f_{1N}=332.57\ \text{kHz}$ ,  $f_{2N}=898.58\ \text{kHz}$

(a) 気泡 1, (b) 気泡 2

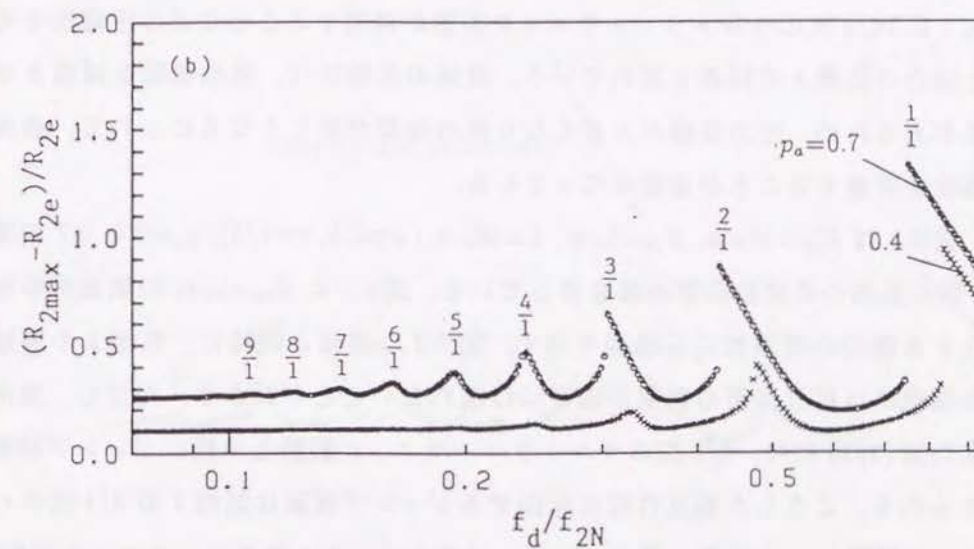
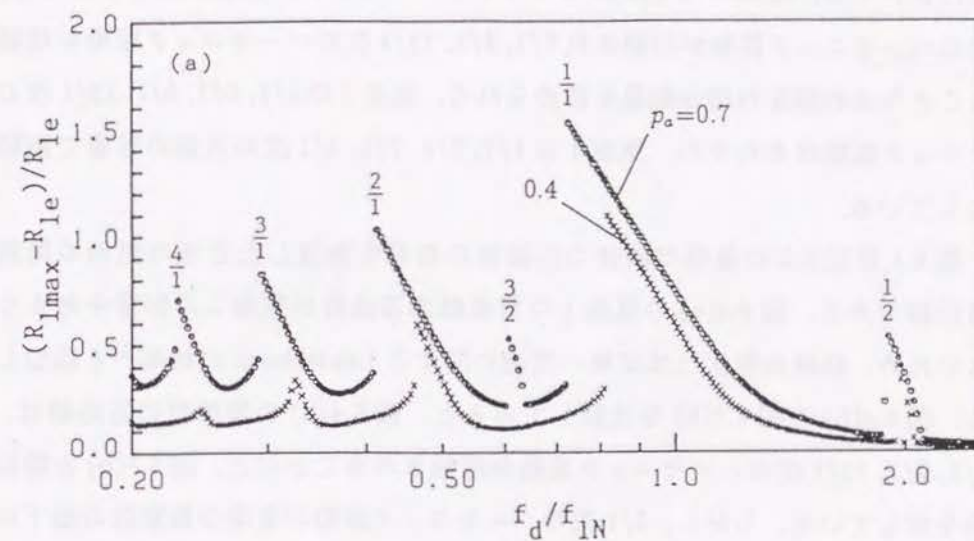


図 6.3 単一気泡の周波数応答曲線

$R_{1e}=10\ \mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=4\ \mu\text{m}$ ,  $f_{1N}=332.98\ \text{kHz}$ ,  $f_{2N}=890.27\ \text{kHz}$

(a) 気泡 1, (b) 気泡 2



モニック振動に移行している。また、 $p_a=0.7$  の場合には、 $f_d/f_{2N}=0.7$  付近に新たに  $3/2$  次のウルトラハーモニック振動が現れている。 $f_d/f_{2N} \leq 0.3$  の低い振動数領域においても、 $p_a=0.7$  で  $8/2$  次のウルトラハーモニック振動が発生すること、 $5/1$  次のハーモニック振動が抑制され  $6/1$ ,  $9/1$ ,  $12/1$  次のハーモニック振動が増幅されることなどの相互作用の効果が認められる。気泡2の  $3/1$ ,  $6/1$ ,  $9/1$ ,  $12/1$  次のハーモニック振動はそれぞれ、気泡1の  $1/1$ ,  $2/1$ ,  $3/1$ ,  $4/1$  次の共振の影響で振幅が増大している。

図6.4は図6.2の条件で液体の圧縮性の効果を見無視したときの気泡の周波数応答曲線である。図6.4(a)の気泡1の周波数応答曲線は気泡2の影響をあまり受けないため、曲線の形状はほぼ単一気泡に関する Lauterborn の結果<sup>(8)</sup>と類似している。図6.4(b)と図6.2(b)を比較してみると、図6.4(b)の周波数応答曲線は、 $3/1$ ,  $6/1$ ,  $9/1$ ,  $12/1$  次のハーモニック振動が増幅されることなど、図6.2(b)と類似の傾向を示している。しかし、 $3/1$  次のハーモニック振動が音場の振動数の低下に伴い非周期的になること、気泡1が  $5/2$  次のウルトラハーモニック振動を起こすと気泡2に  $14/2$  次のウルトラハーモニック振動が発生することなどの圧縮性を考慮した場合の結果との相違も現れている。液体の圧縮性は、気泡振動を減衰させる効果があるため、圧力振幅が大きくなり気泡振動が激しくなるにつれて、液体の圧縮性を考慮することが重要になってくる。

図6.5は  $R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=5\mu\text{m}$ ,  $L=50\mu\text{m}$  ( $w=0.5$ ,  $\varepsilon=1/5$ ),  $p_a=0.4, 0.7$  の場合の2個の気泡の周波数応答曲線を表している。図6.6に  $R_{2e}=5\mu\text{m}$  の気泡が単独に存在する場合の周波数応答曲線を示す。図6.2の場合と同様に、気泡1の周波数応答曲線には相互作用の効果が顕著には現れないことがわかる。ただし、気泡1の主共振 ( $1/1$ ) には、 $2/2$  次のウルトラハーモニック振動との間にジャンプ現象が認められる。こうした相互作用に起因するジャンプ現象は気泡2の  $2/1$  次のハーモニック振動により顕著に現れている。すなわち、 $2/1$  次のハーモニック振動には、 $5/2$  次のウルトラハーモニック振動および  $3/1$  ( $6/2$ ) 次のハーモニック振動との間にジャンプ現象が認められる。また、気泡2の主共振は、気泡1が  $1/2$  次のサブハーモニック振動を起こしている領域で  $2/2$  次のウルトラハーモニック振動に移行している。さらに、気泡2の周波数応答曲線においては、 $4/1$ ,  $6/1$ ,  $8/1$  次のハーモ

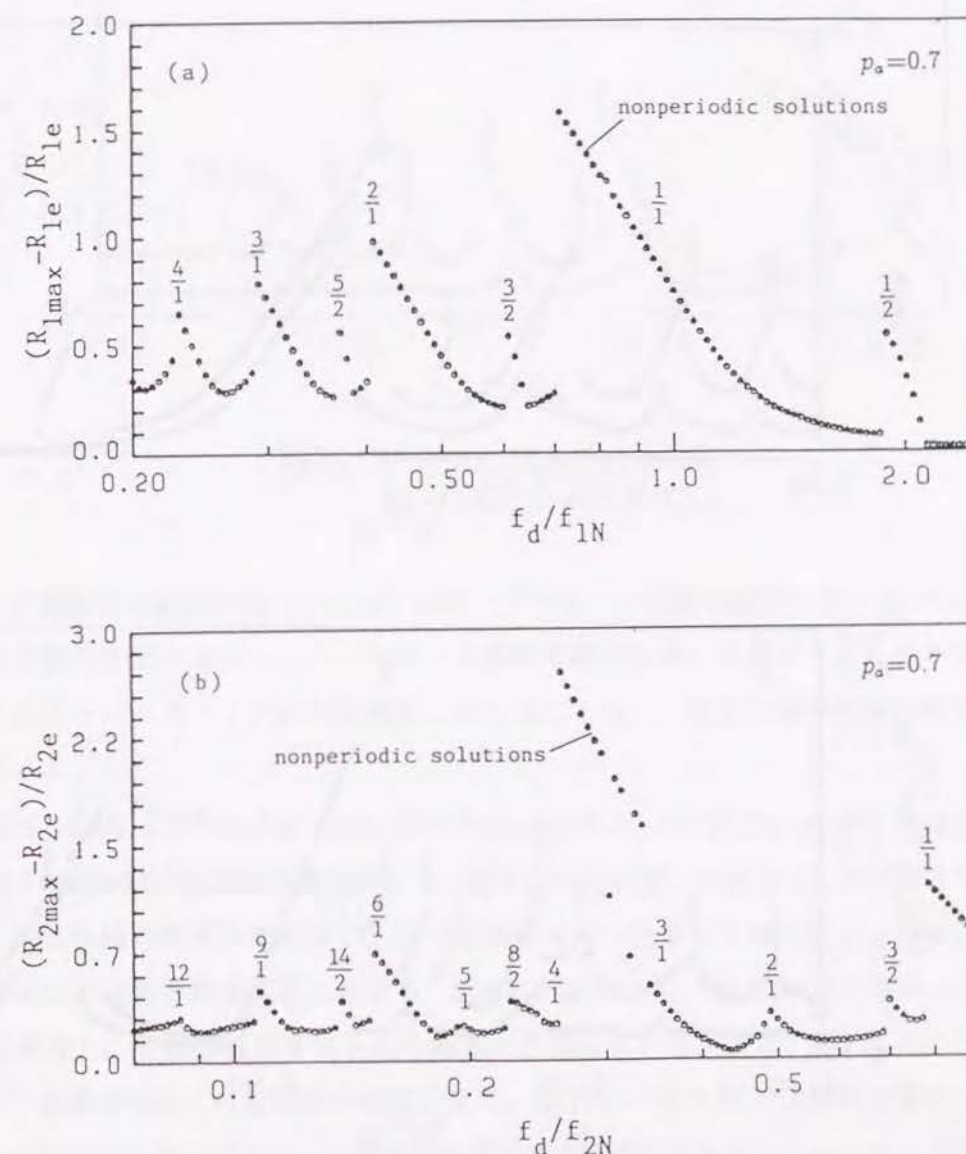


図6.4 2個の気泡の周波数応答曲線 (非圧縮性の場合)  
 $R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $\varepsilon=1/5$ ,  $w=0.4$ ,  $f_{1N}=332.63\text{ kHz}$ ,  $f_{2N}=899.12\text{ kHz}$   
 (a) 気泡1, (b) 気泡2



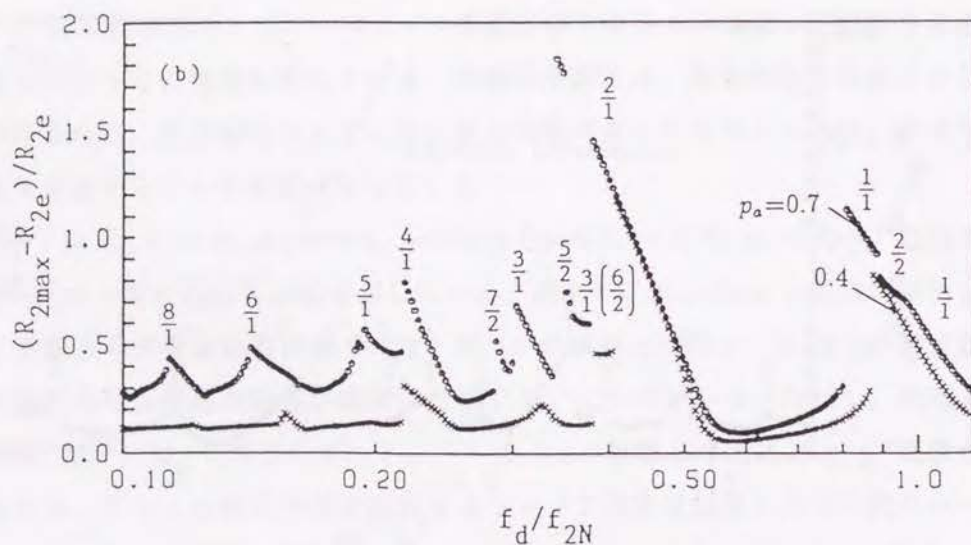
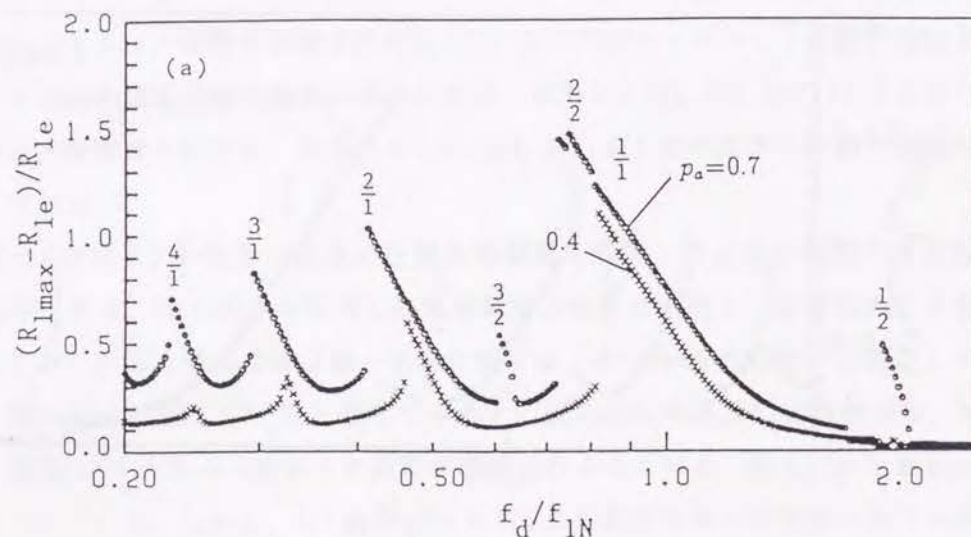


図 6.5 2 個の気泡の周波数応答曲線

$R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $\epsilon=1/5$ ,  $w=0.5$ ,  $f_{1N}=332.03\text{ kHz}$ ,  $f_{2N}=706.24\text{ kHz}$

(a) 気泡 1, (b) 気泡 2

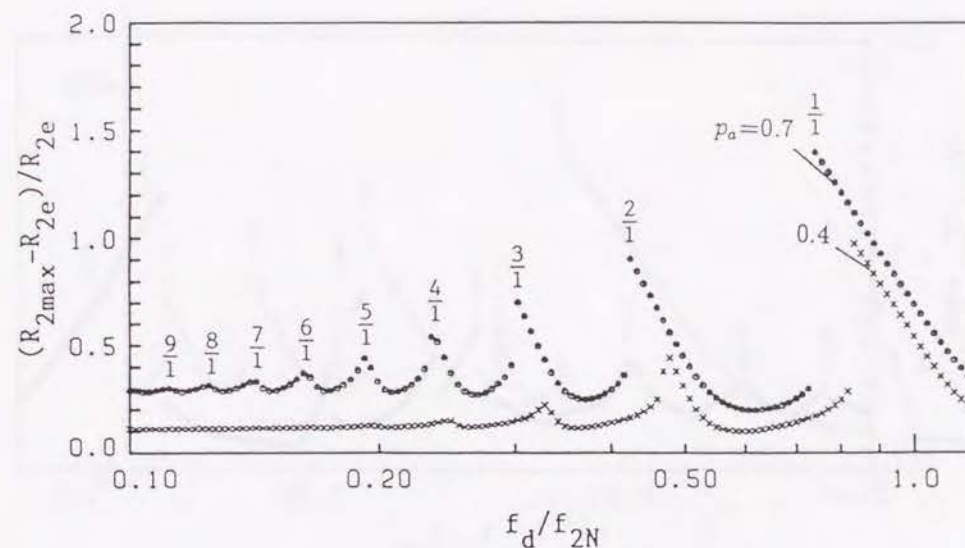


図 6.6 単一気泡の周波数応答曲線

$R_{2e}=5\mu\text{m}$ ,  $f_{2N}=697.16\text{ kHz}$

ニック振動が増幅されること、7/1 次のハーモニック振動が顕著に現れないこと、気泡 1 が 3/2 次のウルトラハーモニック振動を起こしている領域で新たに 7/2 次のウルトラハーモニック振動が発生していることなど、相互作用の効果が歴然としている。

図 6.7 は  $R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=5\mu\text{m}$ ,  $L=100\mu\text{m}$  ( $w=0.5$ ,  $\epsilon=1/10$ ),  $p_a=0.7$  の場合の気泡 2 の周波数応答曲線を表している。図 6.5(b) と比較してみると、 $L$  が大きくなると相互作用の効果は緩和され、固有振動数も単一気泡のそれに近づくため、両者にはいくつかの相違が認められる。図 6.7 の場合には、2/1 次のハーモニック振動が減衰し、一部それが発生しない領域が存在している。また、3/1 次のハーモニック振動は気泡 1 の主共振の影響を受け、 $f_d/f_{2N}=0.3, 0.35$  の二箇所に現れている。7/2 ウルトラハーモニック振動が気泡 1 の 3/2 次のウルトラハーモニック振動に対応して発生しているのは、図 6.5 の場合と類似している。

以上の結果より、概して気泡 2 の振動形態は気泡 1 の振動形態に支配されているが、気泡 2 の振動が激しくなると、逆に気泡 2 の振動が気泡 1 に影響を及ぼすようになり、その結果として、個々の気泡の独立な運動が抑制されていることが



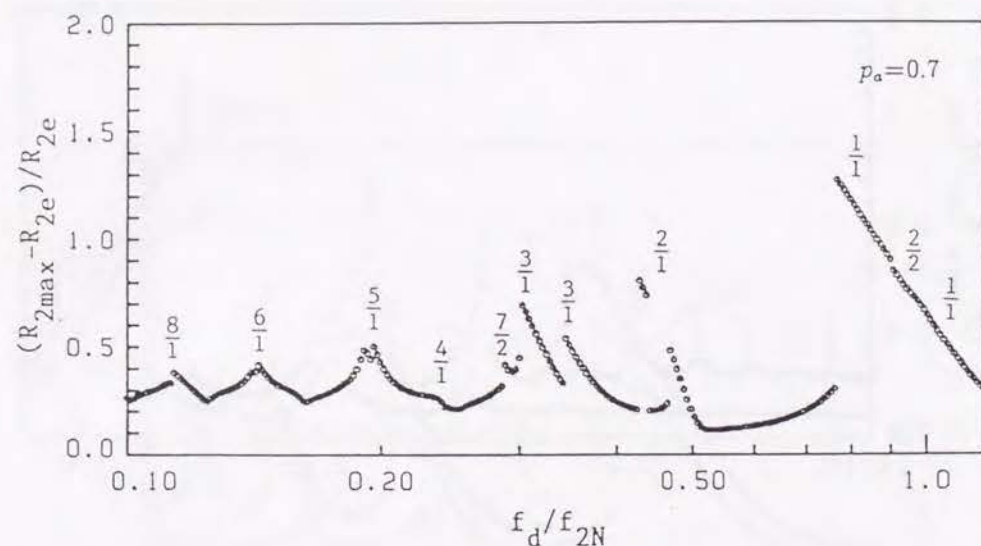


図 6.7 2 個の気泡の周波数応答曲線 (気泡 2)

$R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $\varepsilon=1/10$ ,  $w=0.5$ ,  $f_{1N}=332.76\text{ kHz}$ ,  $f_{2N}=699.37\text{ kHz}$

わかる。そのため、一方の気泡がウルトラハーモニック振動していれば他の気泡もウルトラハーモニック振動を行うという具合に両者は同様の振動形態をとることになる。

図 6.8 は同じ大きさの 2 個の気泡の周波数応答曲線 ( $R_{1e}=R_{2e}=10\mu\text{m}$ ,  $L=100\mu\text{m}$ ,  $p_a=0.7$ ) を表している。初期平衡半径が同じ場合には、初期条件から両者は全く同じ振動を行う。図 6.3(a) の相互作用がない場合と比較すると、 $f_d/f_{1N}=0.37$  付近に新たに  $5/2$  次のウルトラハーモニック振動が発生していることがわかる。また、 $1/1$ ,  $2/1$  次のハーモニック振動は相互作用の効果で極大値がわずかに減少している。

#### 6.2.4 ウルトラハーモニック振動とキャビテーションノイズ

気泡がその固有振動数以下で駆動されている場合には、他のウルトラハーモニック振動と比べて低い圧力振幅値で  $3/2$  次のウルトラハーモニック振動が現れる。 $3/2$  次のウルトラハーモニック振動のように、圧力変動の 2 倍の周期 (共振の次数の分母が 2 の場合) を基本として振動している場合には、振動波形に音場の振動数

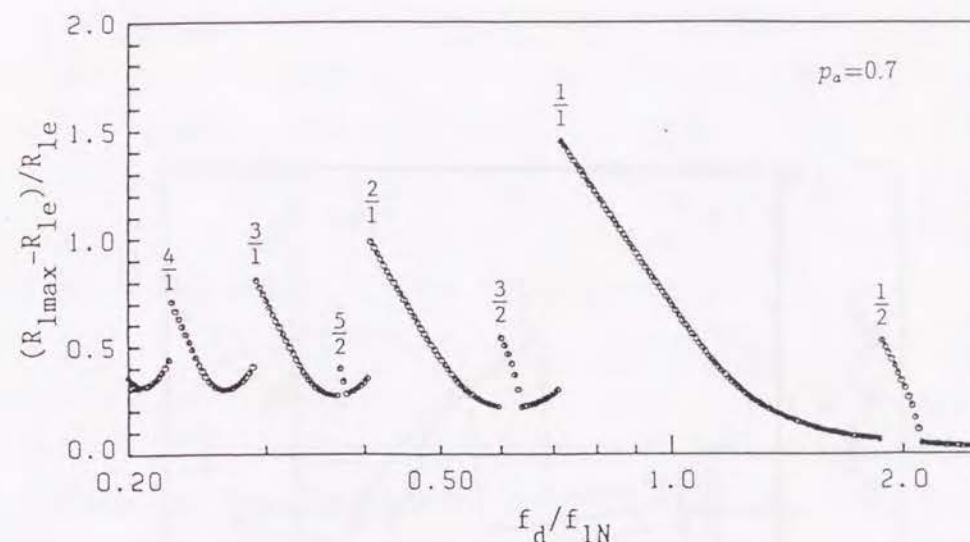


図 6.8 同じ大きさの 2 個の気泡の周波数応答曲線

$R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $\varepsilon=1/10$ ,  $w=1.0$ ,  $f_{1N}=317.65\text{ kHz}$ ,  $f_{2N}=350.80\text{ kHz}$

の  $1/2$  倍のスペクトル成分が含まれることになる。そのため、こうした振動形態が音響キャビテーションノイズに含まれる音場の振動数の  $1/2$  倍のスペクトル成分の原因となり得る。そこで、本節では気泡 1 の  $3/2$  次のウルトラハーモニック振動が発生する領域での気泡間の相互作用の効果について解析する。

図 6.9 は  $R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=5\mu\text{m}$ ,  $L=50\mu\text{m}$  ( $w=0.5$ ,  $\varepsilon=1/5$ ),  $p_a=0.5, 0.6, 0.7, 0.8$  の場合の気泡の周波数応答曲線を表している。図 6.9 より、 $p_a=0.6$  で気泡 1 に  $3/2$  次のウルトラハーモニック振動が現れると、気泡 2 に  $7/2$  次のウルトラハーモニック振動が現れていることがわかる。また、圧力振幅が上昇し  $p_a=0.8$  になると、気泡 2 の  $3/1$  次のハーモニック振動は  $6/2$  次のウルトラハーモニック振動に移行し、それに伴い気泡 1 の周波数応答曲線の形も変化していることがわかる。

図 6.10 は音場の振動数を  $f_d=202.54\text{ kHz}$  ( $f_d/f_{1N}=0.61$ ) に固定して、圧力振幅  $p_a$  を  $0.4\sim 0.8$  まで  $0.01$  刻みに変化させたときの、ウルトラハーモニック振動が発生するしきい値を見たものである。この図からわかるように 2 個の気泡は  $p_a=0.68$  で、同時にウルトラハーモニック振動を開始していることがわかる。

図 6.11 は図 6.10 において、 $p_a=0.7$  のときの、(a) 音場の時間変化、(b) 気泡 1 お



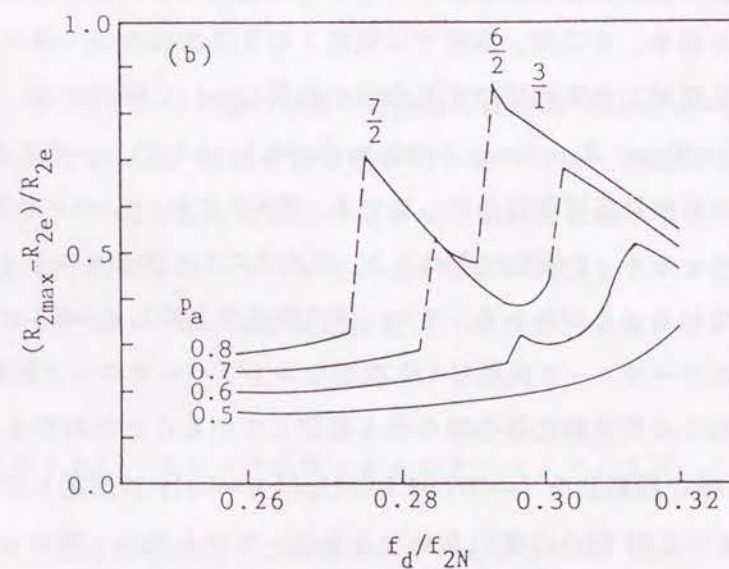
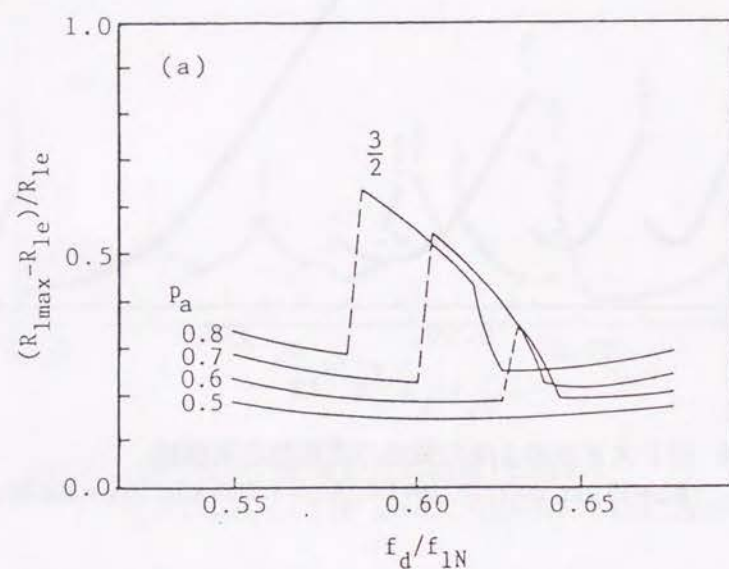


図 6.9 (a) 気泡 1 の  $3/2$  次のウルトラハーモニック振動  
(b) 気泡 2 の  $7/2$  次のウルトラハーモニック振動  
 $R_{1e}=10\text{ }\mu\text{m}$ ,  $\varepsilon=1/5$ ,  $w=0.5$ ,  $f_{1N}=332.03\text{ kHz}$ ,  $f_{2N}=706.24\text{ kHz}$

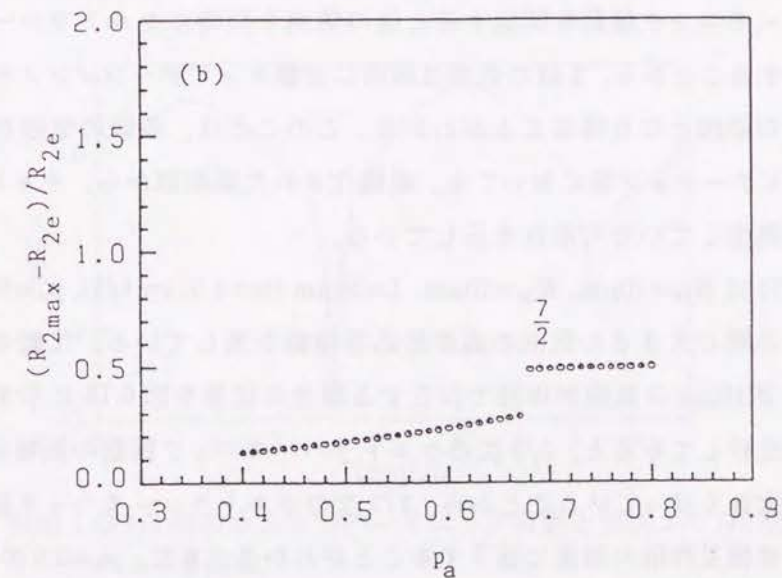
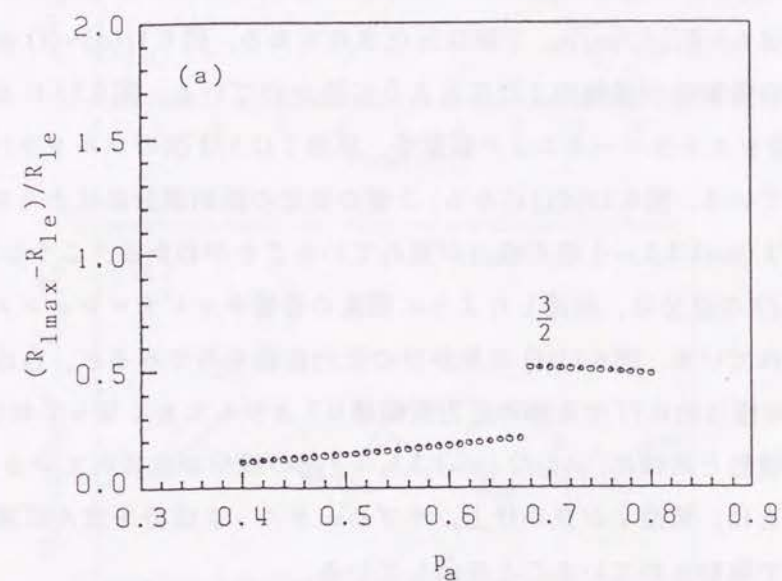


図 6.10 (a) 気泡 1 の  $3/2$  次のウルトラハーモニック振動の開始  
(b) 気泡 2 の  $7/2$  次のウルトラハーモニック振動の開始  
 $R_{1e}=10\text{ }\mu\text{m}$ ,  $\varepsilon=1/5$ ,  $w=0.5$ ,  $f_{1N}=332.03\text{ kHz}$ ,  $f_{2N}=706.24\text{ kHz}$



よび2の定常振動の様子, (c) 気泡2に作用する見かけの圧力変動(式(6.5))の時間変化, (d),(e) 気泡1および2の定常波形をフーリエ級数展開したときの成分, (f) 図(c)の見かけの圧力変動をフーリエ級数展開したときの成分を表している. 時間は  $t$  は  $t_0 = R_{1e}/\sqrt{p_0/\rho_\infty}$  で無次元化されており, 図6.11(d)~(f)のスペクトル線は音場の振動数が横軸の1になるように描かれている. 図6.11において気泡1は3/2次のウルトラハーモニック振動を, 気泡2は7/2次のウルトラハーモニック振動をしている. 図6.11(d),(e)から, 2個の気泡の振動成分にはともに, かなり顕著に  $nf_d/2$  ( $n=1,3,5,\dots$ ) 倍の成分が現れていることがわかる. こうした振動数成分, 特に  $f_d/2$  の成分は, 前述したように現実の音響キャビテーションノイズにおいて計測されている. 図6.11(f)の見かけの圧力変動をみると,  $f_d$ 成分が最も大きく, その値は約0.77で実際の圧力振幅値0.7よりも大きくなっており, また, 気泡の振動波形と同様に,  $nf_d/2$  ( $n=1,3,5,\dots$ ) 倍の成分が含まれていることがわかる. このことは, 気泡2が見かけ上, サブハーモニック成分を含んだ実際より高い圧力振幅で駆動されていることを示している.

図6.9~図6.11ならびに前節の結果を総合すると, いったん, 一方の気泡がウルトラハーモニック振動を開始すると他の気泡も同時にウルトラハーモニック振動を開始することから, 2個の気泡は同時に音響キャビテーションノイズの同じ振動数成分の原因となり得ることがわかる. このことは, 多数の気泡が存在する現実のキャビテーション場においても, 組織化された気泡群から, キャビテーションノイズが発生している可能性を示している.

図6.12は  $R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=10\mu\text{m}$ ,  $L=50\mu\text{m}$  ( $w=1.0$ ,  $\epsilon=1/5$ ),  $p_a=0.5, 0.6, 0.7, 0.8$  の場合の同じ大きさの気泡の周波数応答曲線を表している. 比較のため, 図6.12の条件で  $10\mu\text{m}$  の気泡が単独で存在する場合の結果を図6.13に示す. 図6.12と図6.13を比較してみると, 3/2次のウルトラハーモニック振動の振幅は, 相互作用の効果で大きくなっていることから, 3/2次のウルトラハーモニック振動の発生のしきい値は相互作用の効果で低下することがわかる. また,  $p_a=0.8$  の場合には, 3/2次のウルトラハーモニック振動が音場の振動数の低下に伴い周期倍化し, 6/4次のウルトラハーモニック振動に移行していることがわかる.

以上の結果ならびに図6.8において相互作用を考慮すると5/2次のウルトラハー

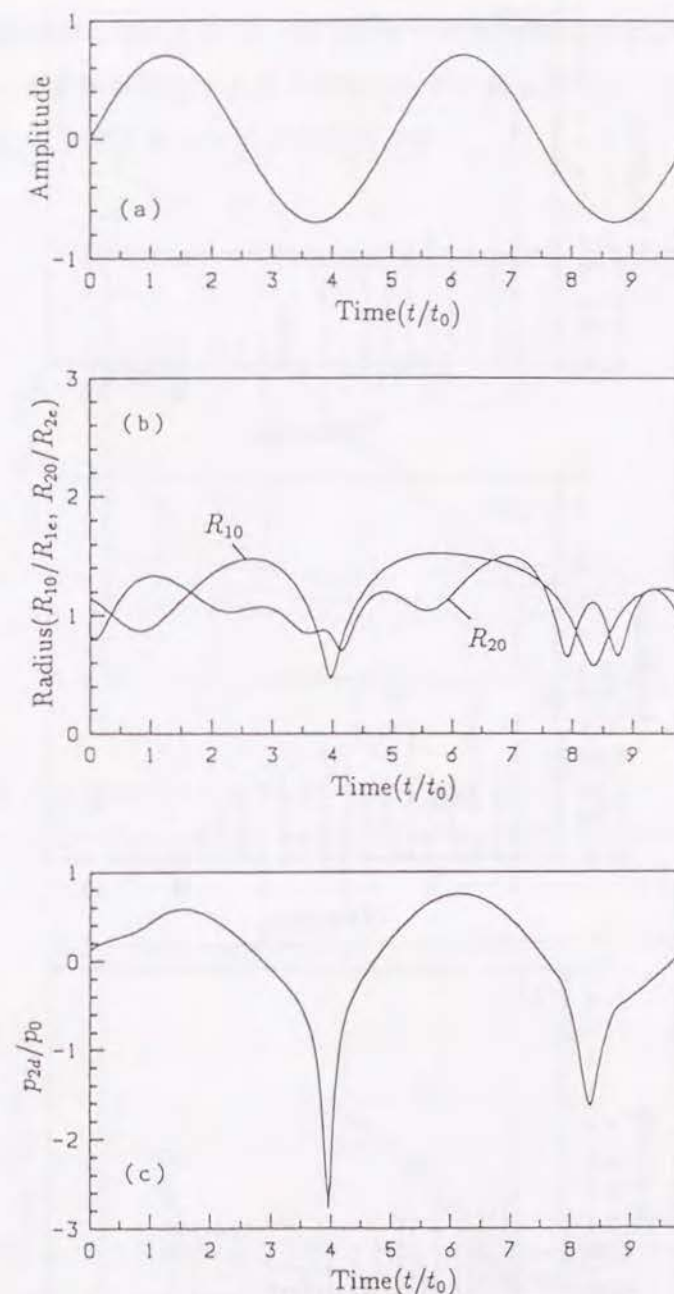


図6.11 気泡1の3/2次のウルトラハーモニック振動と気泡2の7/2次のウルトラハーモニック振動

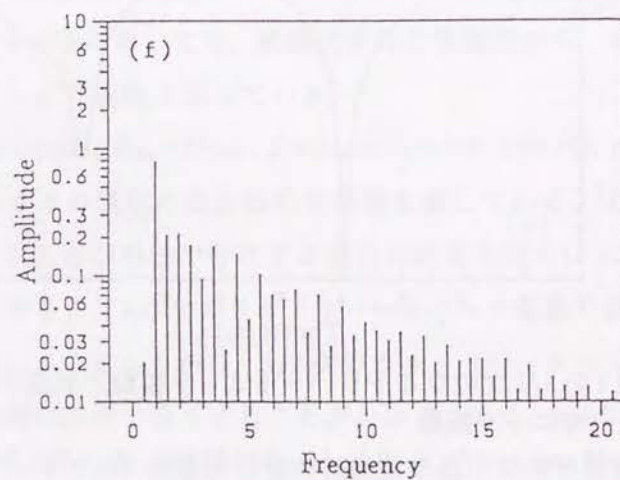
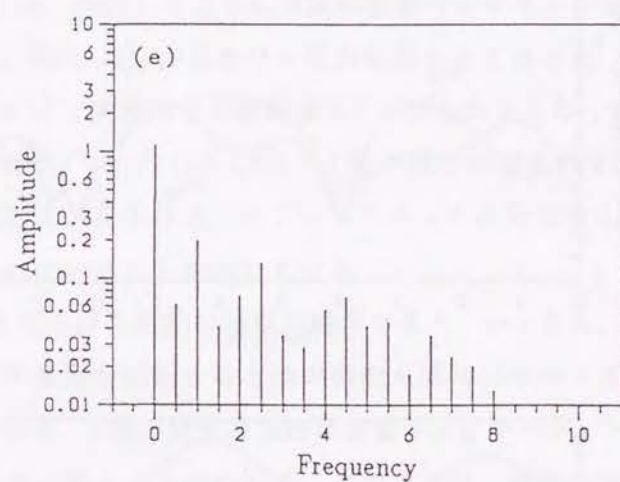
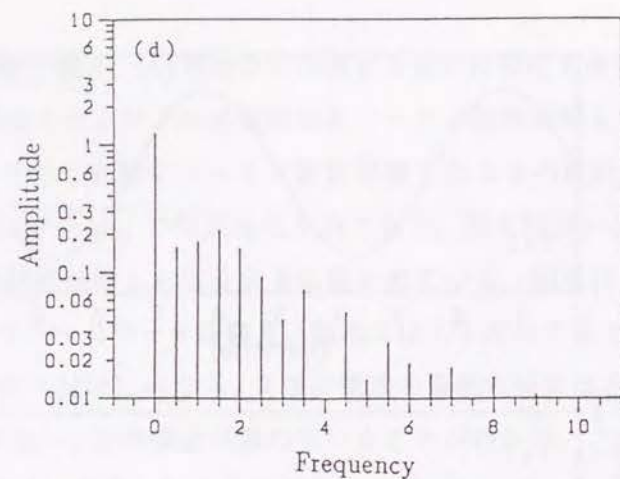
$R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $\epsilon=1/5$ ,  $w=0.5$ ,  $f_{1N}=332.03\text{kHz}$ ,  $f_{2N}=706.24\text{kHz}$

(a) 音圧の変化

(b) 気泡半径の時間変化

(c) 見かけの圧力変動の時間変化





(d) 気泡1の定常波形のフーリエ級数成分  
(e) 気泡2の定常波形のフーリエ級数成分  
(f) 見かけの圧力変動のフーリエ級数成分

モニック振動が現れることから、同じ大きさの気泡が存在する場合には、ウルトラハーモニック振動が発生する圧力振幅のしきい値は低下し、ウルトラハーモニック振動が起こりやすくなるものと考えられる。

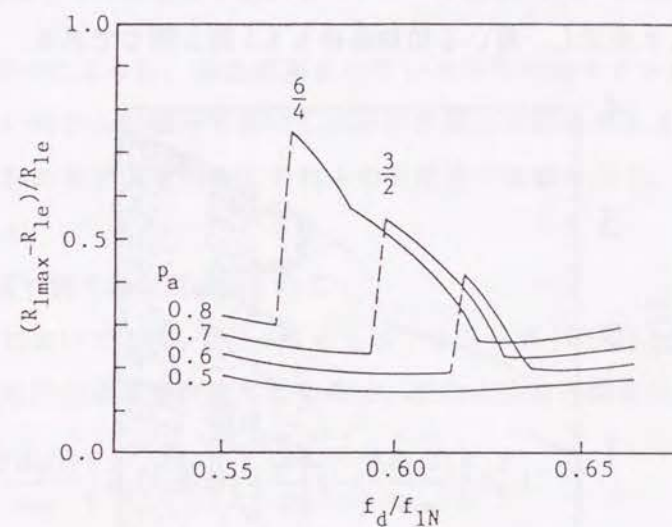


図 6.12 3/2 次のウルトラハーモニック振動  
 $R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $\varepsilon=1/5$ ,  $w=1.0$ ,  $f_{1N}=304.06\text{ kHz}$ ,  $f_{2N}=372.16\text{ kHz}$

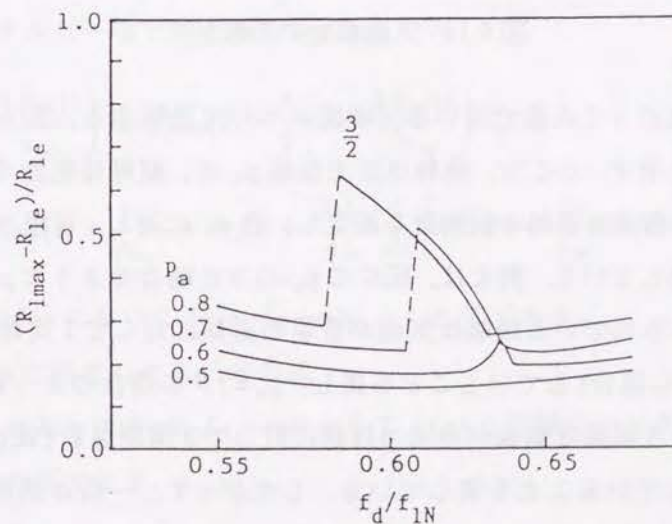


図 6.13 3/2 次のウルトラハーモニック振動(単一気泡の場合)  
 $R_{1e}=10\mu\text{m}$ ,  $f_{1N}=332.98\text{ kHz}$



### 6.3 気泡振動の分岐構造

本節では、気泡周囲の液体圧力が正弦波状に変動している場合の気泡振動とカオス現象との関連を分岐図を用いて解析する。本節で用いる物理定数は、 $\rho_\infty=998.2 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma=7.275 \times 10^{-2} \text{ N/m}$  を除いて表 6.1 と同様である。また、結果は 6.2 節と同様に無次元化して表示し、用いる初期条件も 6.2 節と同じである。

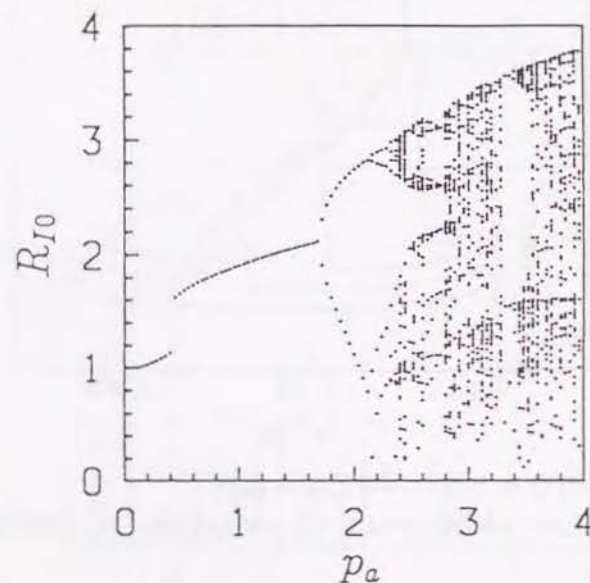


図 6.14 気泡振動の分岐図

まず解析に先だって本節で用いる分岐図について説明する。図 6.14 に気泡振動の分岐図の例を示す。ここで、横軸は圧力振幅  $p_a$  を、縦軸は気泡半径  $R_{I0}$  を表している。図中の各点は音場の振動数を固定し、各  $p_a$  に対し、音場の位相  $0^\circ$  における半径  $R_{I0}$  を表している。例えば、図中の  $p_a=1.0$  の場合のように  $p_a$  に対して、点が 1 点プロットされている領域は気泡が音場の周期に対して 1 周期運動 (式 (6.14) において  $m=1$  の場合) していることを表し、 $p_a=1.8$  の場合のように、点が 2 点プロットされている領域は気泡が音場の周期に対して 2 周期運動 (式 (6.14) において  $m=2$  の場合) していることを表している。したがって、一般に気泡が音場の周期に対して  $m$  周期運動していれば、各  $p_a$  に対して、点が  $m$  点プロットされることになる。各  $p_a$  に対して、点は最大 64 点プロットされている。図 6.14 の例では気

泡は 1 周期運動から  $p_a \approx 1.7$  で 2 周期運動に分岐し、その後、 $2^n$  の周期倍化を経てカオス状態に至っていることが読みとれる。なお、以下に示す単一球形気泡の解析の際には、気泡を表す添え字  $I$  は省略する。

#### 6.3.1 気泡モデルの比較

3.5 節で述べたように、現在提案されている球形気泡モデルには、 $1/a_\infty$  を含む項まで正しいモデルに限ってもいくつかの表現上の相違がある。本節では、代表的な単一球形のモデルを用いてそれらの分岐図の比較を行う。用いる気泡モデルを以下に示す。

(a) 圧力項で表された Herring の式

式 (3.84) において  $\Lambda=1$ ,  $L_{IJ} \rightarrow \infty$  として、さらに式 (2.127) の近似を用い、エンタルピー項を圧力項で書き直したもので、次のように表現される。

$$\left\{1 - \frac{2\dot{R}_0(t)}{a_\infty}\right\} R_0(t) \ddot{R}_0(t) + \frac{3}{2} \left\{1 - \frac{4\dot{R}_0(t)}{3a_\infty}\right\} \dot{R}_0^2(t) = \frac{1}{\rho_\infty} \{p_{Iw}(t) - p_0 + p_a \sin 2\pi f_d t\} + \frac{R_0}{\rho_\infty a_\infty} \frac{d}{dt} \{p_{Iw}(t) + p_a \sin 2\pi f_d t\} \quad (6.17)$$

この式は、6.2 節で用いた式と同じである。

(b) エンタルピー項で表された Herring の式

$$\left\{1 - \frac{2\dot{R}_0(t)}{a_\infty}\right\} R_0(t) \ddot{R}_0(t) + \frac{3}{2} \left\{1 - \frac{4\dot{R}_0(t)}{3a_\infty}\right\} \dot{R}_0^2(t) = h_{Iw}(t) + \frac{p_a}{\rho_\infty} \sin 2\pi f_d t + \frac{R_0(t)}{a_\infty} \frac{d}{dt} \left\{h_{Iw}(t) + \frac{p_a}{\rho_\infty} \sin 2\pi f_d t\right\} \quad (6.18)$$

これは式 (3.84) において  $\Lambda=1$ ,  $L_{IJ} \rightarrow \infty$  とした式である。

(c) 圧力項で表された Keller の式

式 (3.84) において  $\Lambda=0$ ,  $L_{IJ} \rightarrow \infty$  として、(a) と同様にエンタルピー項を圧力項で書き直した式である。

$$\left\{1 - \frac{\dot{R}_0(t)}{a_\infty}\right\} R_0(t) \ddot{R}_0(t) + \frac{3}{2} \left\{1 - \frac{\dot{R}_0(t)}{3a_\infty}\right\} \dot{R}_0^2(t)$$



$$= \left\{ 1 + \frac{\dot{R}_0(t)}{a_\infty} \right\} \frac{1}{\rho_\infty} \{ p_{Iw}(t) - p_0 + p_a \sin 2\pi f_d t \} \\ + \frac{R_0(t)}{\rho_\infty a_\infty} \frac{d}{dt} \{ p_{Iw}(t) + p_a \sin 2\pi f_d t \} \quad (6.19)$$

(d) エンタルピー項で表された Keller の式

$$\left\{ 1 - \frac{\dot{R}_0(t)}{a_\infty} \right\} R_0(t) \ddot{R}_0(t) + \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{\dot{R}_0(t)}{3a_\infty} \right\} \dot{R}_0^2(t) \\ = \left\{ 1 + \frac{\dot{R}_0(t)}{a_\infty} \right\} \left\{ h_{Iw}(t) + \frac{p_a}{\rho_\infty} \sin 2\pi f_d t \right\} \\ + \frac{R_0(t)}{a_\infty} \frac{d}{dt} \left\{ h_{Iw}(t) + \frac{p_a}{\rho_\infty} \sin 2\pi f_d t \right\} \quad (6.20)$$

これは式 (3.84) において  $\Lambda=0$ ,  $L_{IJ} \rightarrow \infty$  とした式である.

(e) Gilmore の式

液体の速度を  $u$ , 音速を  $a$  とするとき,  $r(h+u^2/2)$  が外向きの特性曲線  $dr=(u+a)dt$  に沿って保存されるとする Kirkwood-Beth の仮定<sup>(22)</sup>

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (a+u) \frac{\partial}{\partial r} \right] \left[ r \left( h + \frac{u^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (6.21)$$

を満足するとして得られた運動方程式で, 次のように与えられる<sup>(18),(23)</sup>.

$$\left\{ 1 - \frac{\dot{R}_0(t)}{a_\infty} \right\} R_0(t) \ddot{R}_0(t) + \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{\dot{R}_0(t)}{3a_\infty} \right\} \dot{R}_0^2(t) \\ = \left\{ 1 + \frac{\dot{R}_0(t)}{a_\infty} \right\} h_g(t) + \left\{ 1 - \frac{\dot{R}_0(t)}{a_\infty} \right\} \frac{R_0(t)}{a_\infty} \frac{dh_g(t)}{dt} \quad (6.22)$$

ここで,

$$h_g(t) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0 + B}{\rho_\infty} \left\{ \left( \frac{p_{Iw}(t) + B}{p_0 + B} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \left( \frac{p_0 + B - p_a \sin 2\pi f_d t}{p_0 + B} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right\} \quad (6.23)$$

図 6.15 は初期平衡半径  $R_e=10 \mu\text{m}$ ,  $f_d=200.06 \text{ kHz}(=0.6 \times f_N, f_N: \text{固有振動数})$  の場合の気泡半径の分岐図である. 図の (a)~(e) はそれぞれ上記の式 (a)~(e) に対応している. 図 6.15(a) と (b) ならびに (c) と (d) を比較してみると, Herring 型の式 ((a),(b)), Keller 型の式 ((c),(d)) のいずれの場合にも圧力項で表された式とエン

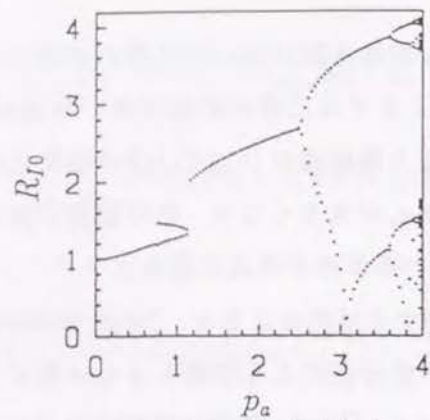
タルピー項で表された式との間に明確な相違は現れないことがわかる. 一方, 図 6.15(b),(d),(e) を比較すると, 約  $p_a \leq 2.2$  までは三者に明確な違いは現れないが, それ以上になると気泡振動が分岐する圧力振幅値が (b),(d),(e) の順に低圧力振幅側に移行していることがわかる. これは  $p_a$  が大きくなり, 気泡振動が激しくなるにつれて  $1/a_\infty^2$  を含む項の影響が現れているためと考えられる.

これまでに行われた単一球形気泡に関する解析によると, (e) の Gilmore の式による結果は, 気泡の崩壊過程において, 差分法による結果とよく一致することが報告されているが<sup>(24)</sup>, 一方で, Prosperetti ら<sup>(21)</sup> は, 気泡の最初のリバウンド時の最大速度は Gilmore の式よりもむしろ (d) のエンタルピー項で表された Keller の式の方が精度がよいことを示している. さらに, Prosperetti ら<sup>(21),(25)</sup> は, 全般に, Herring 型の式 ((a),(b)) よりも Keller 型の式 ((c),(d)) の方が精度がよく, 圧力項で表された式 ((a),(c)) よりもエンタルピー項で表された式 ((b),(d)) の方が精度がよいことを報告している. これらの点から判断して, 以下の解析では, 式 (3.84) において  $\Lambda=0$  としたエンタルピー項で表された式を用いて解析を行うことにする. なお, 前節までと同様に, 時間遅れ  $\zeta_{IJ}$  の効果は無視する.

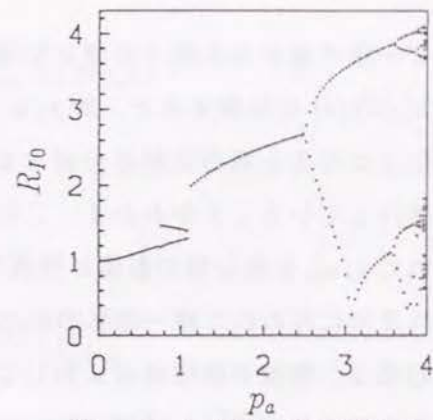
### 6.3.2 気泡振動の分岐図

図 6.16 に  $R_e=10 \mu\text{m}$  の場合 ( $f_N=333.43 \text{ kHz}$ ) の単一気泡の分岐図を示す. 図の (a)~(h) は順に  $f_d=200.06 \text{ kHz}(0.6 \times f_N)$  から  $f_d=433.47 \text{ kHz}(1.3 \times f_N)$  まで  $33.34 \text{ kHz}(0.1 \times f_N)$  ずつ音場の振動数を変化させた場合に対応している. これらの図を見てみると, (a)~(e) に典型的に現れているように, 気泡振動は  $2^n$  倍の周期倍化を経てカオスに至ることがわかる. こうしたカオスに至る構造は現実のキャビテーションノイズにおいても観測されている<sup>(10)</sup>. 次に, (a) から (d) までの図を比較してみると, (a) において約  $p_a \geq 3.7$  の範囲に見られるカオス域が (b) では約  $p_a \geq 2.8$ , (c) では約  $p_a \geq 2.4$ , (d) では約  $p_a \geq 2.1$  というように, カオス域が開始する圧力振幅のしきい値が低下し, カオス域が低圧力振幅側に移行していることがわかる. なお, (a) の  $p_a=0.8 \sim 1.0$  付近に現れている 2 周期運動は, 6.2 節で示したウルトラハーモニック振動 (3/2 次) を表している. また, (d) と (e) を比較してみると, カオス域が開始する圧力振幅のしきい値はあまり変化していないが, (e) では

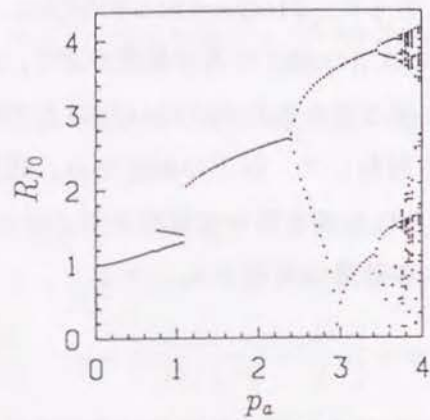




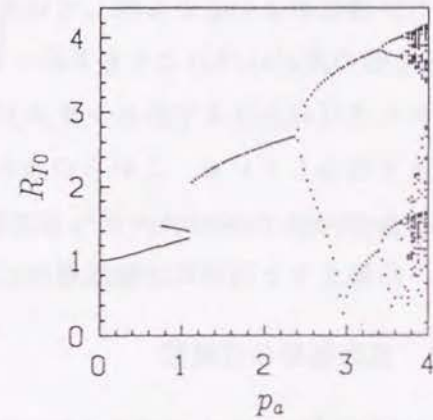
(a) 圧力項で表された  
Herring の式



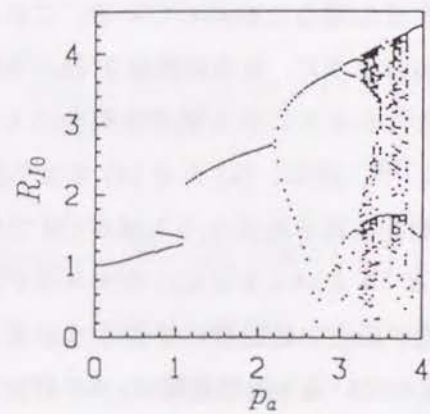
(b) エンタルピー項で表された  
Herring の式



(c) 圧力項で表された  
Keller の式

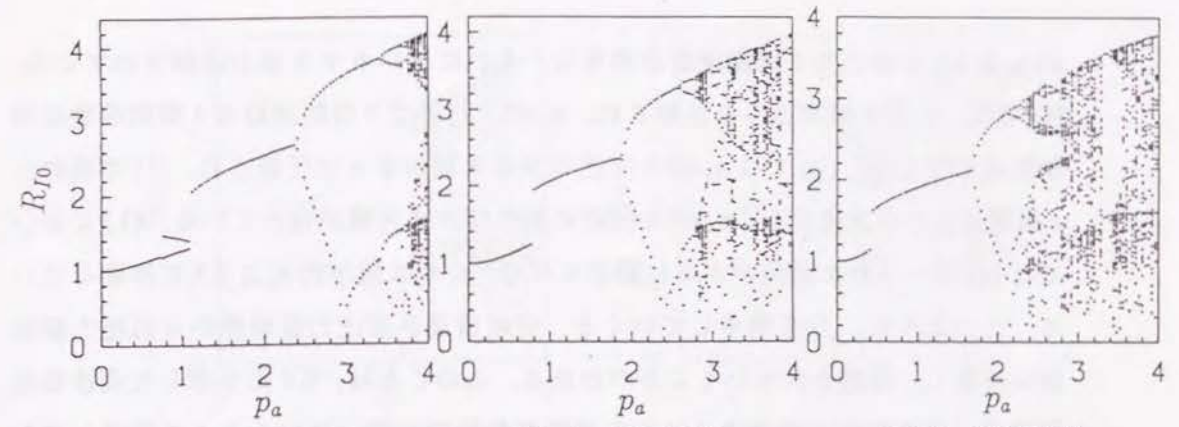


(d) エンタルピー項で表された  
Keller の式



(e) Gilmore の式

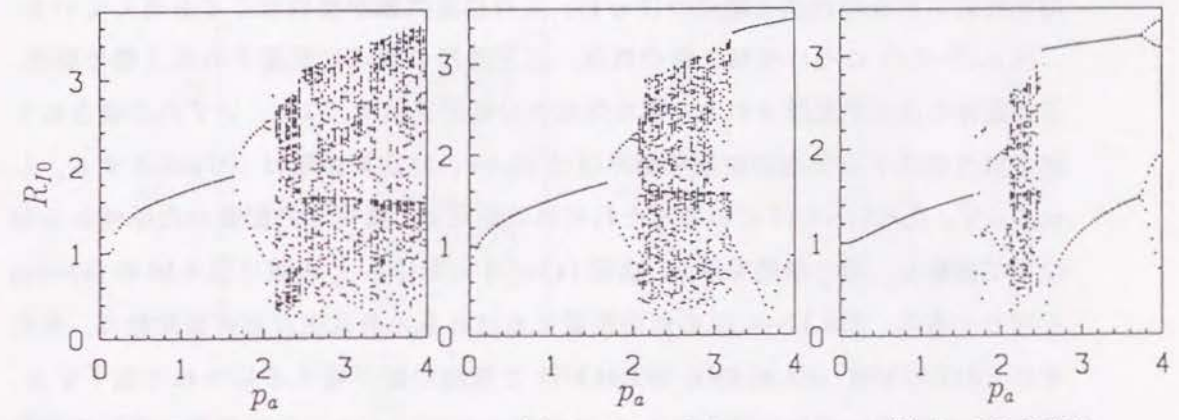
図 6.15 気泡モデルの比較



(a)  $f_d=200.06$  kHz

(b)  $f_d=233.40$  kHz

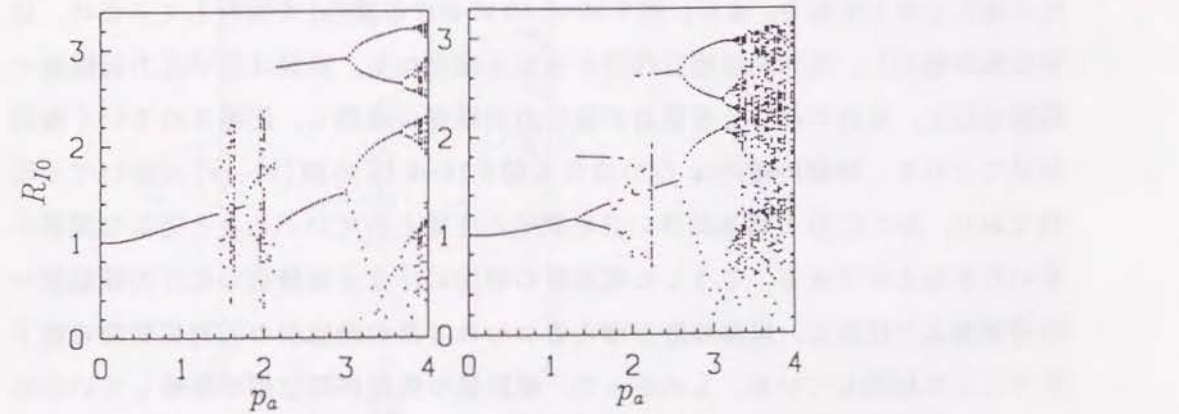
(c)  $f_d=266.75$  kHz



(d)  $f_d=300.09$  kHz

(e)  $f_d=333.43$  kHz

(f)  $f_d=366.78$  kHz



(g)  $f_d=400.12$  kHz

(h)  $f_d=433.47$  kHz

図 6.16 単一気泡の分岐図 ( $R_e=10 \mu\text{m}$ ,  $f_N=333.43$  kHz)



約  $p_a \geq 3.2$  に新たな 2 周期運動が発生し、それに伴いカオス域が圧縮されている。(f) では、カオス域がさらに圧縮され、 $p_a=3.7$  付近で 2 周期運動は 4 周期運動に周期倍化している。(g) では  $p_a=2.0$  付近のカオス域がさらに圧縮され、(f) で現れた 4 周期運動が周期倍化し、 $p_a=3.9$  付近に新たなカオス域が現れている。(h) においては (g) でみられた傾向がさらに顕著になり、カオス域が約  $p_a \geq 3.3$  に移動している。このように、 $f_d$  を増やしていくと、分岐構造が高圧力振幅側から低圧力振幅側に移動し、圧縮されていくことがわかる。このことは、6.2 節で示した周波数応答曲線が圧力振幅が増加するにつれて低振動数側に傾いていることに関連している。(a) の  $p_a=1.1$ , (b) の  $p_a=0.8$ , (c) の  $p_a=0.4$  付近に見られる振幅のジャンプも周波数応答曲線の形状と関連づけられ、これは主共振が現れたことを表している。

図 6.17~6.19 にそれぞれ 2 個の気泡、正三角形の頂点に配置された 3 個の気泡、正四面体の頂点に配置された 4 個の気泡の分岐図を示す。なお、いずれの場合にも気泡群を構成する気泡の初期平衡半径は  $10\mu\text{m}$ 、気泡間距離は  $100\mu\text{m}$  とする。したがって、図 6.17~6.19 におけるそれぞれの気泡は、幾何学的配置の対称性から同位相で振動し、同じ挙動を示す。各図 (a)~(e) における  $f_d$  の値は図 6.16 の (a)~(e) と同じである。図 6.17~6.19 の気泡配置における系の最低次の固有振動数は、それぞれ、 $317.93\text{ kHz}$ ,  $304.40\text{ kHz}$ ,  $292.46\text{ kHz}$  で気泡の数が増えるにつれて低下する。図 6.17~6.19 のいずれの場合にも  $f_d$  を増加させていくと、分岐構造が高圧力振幅側から低圧力振幅側に移動し、圧縮されていることがわかる。この傾向は単一気泡の場合と同じである。また、図 6.16~6.19 における図 (a) を比較してみれば、気泡の数が増加し、気泡間の相互作用が強まる場合にも、気泡は低い圧力振幅値で周期倍化し、それに伴い分岐構造が低圧力振幅側に移動し、圧縮されていく傾向が見てとれる。同様の傾向は  $f_d$  の異なる図 6.16~6.19 の図 (b)~(e) においても現れており、そこに  $f_d$  の増加に伴い分岐構造が圧縮されていくことと相似な関係を見いだすことができる。こうした気泡数の増加に伴う分岐構造の低圧力振幅側への移動および圧縮は、気泡の数が増えるにつれて系の最低次の固有振動数の低下することに起因している。したがって、複数個の気泡が同位相で振動している状況は、見かけ上、単一気泡が実際の音場の振動数よりも高い振動数で駆動されている状況に対応している。また、このことは、気泡の初期平衡半径が大きくなる

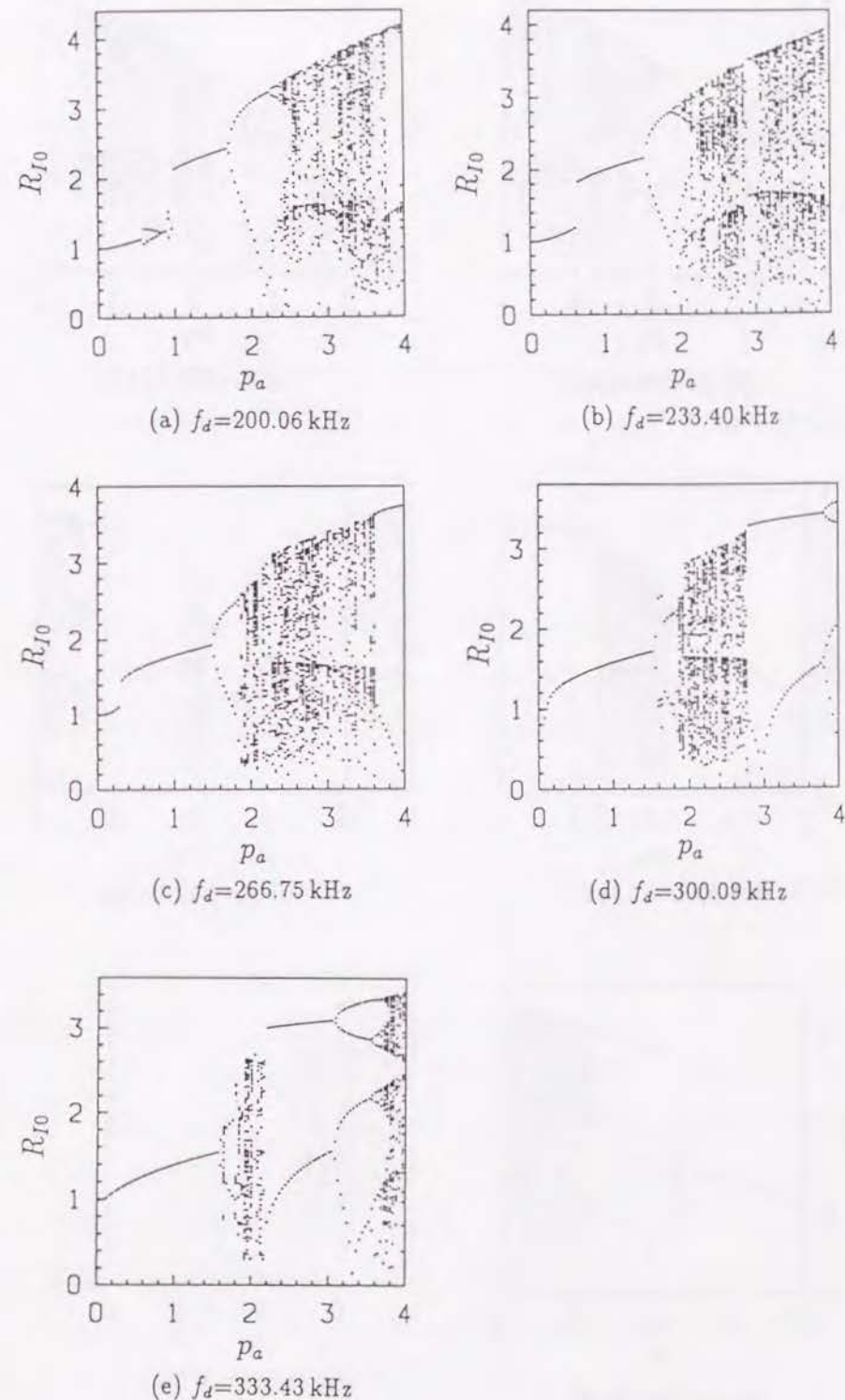
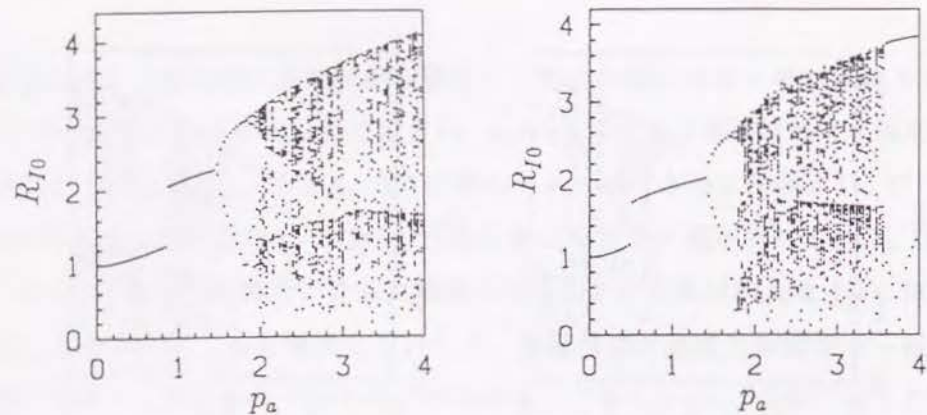


図 6.17 2 個の気泡の分岐図

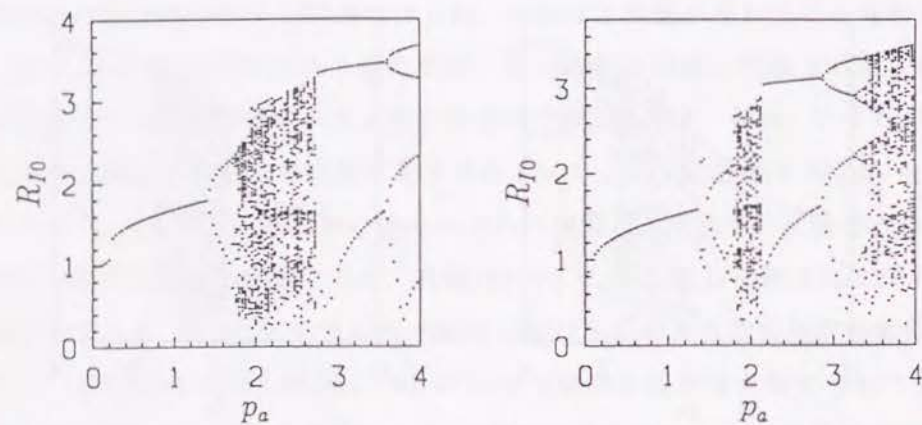
$R_{1e}=R_{2e}=10\mu\text{m}$ ,  $L=100\mu\text{m}$ ,  $f_{1N}=317.93\text{ kHz}$ ,  $f_{2N}=351.46\text{ kHz}$





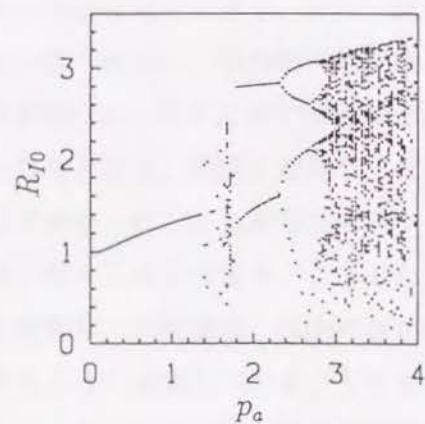
(a)  $f_d=200.06$  kHz

(b)  $f_d=233.40$  kHz



(c)  $f_d=266.75$  kHz

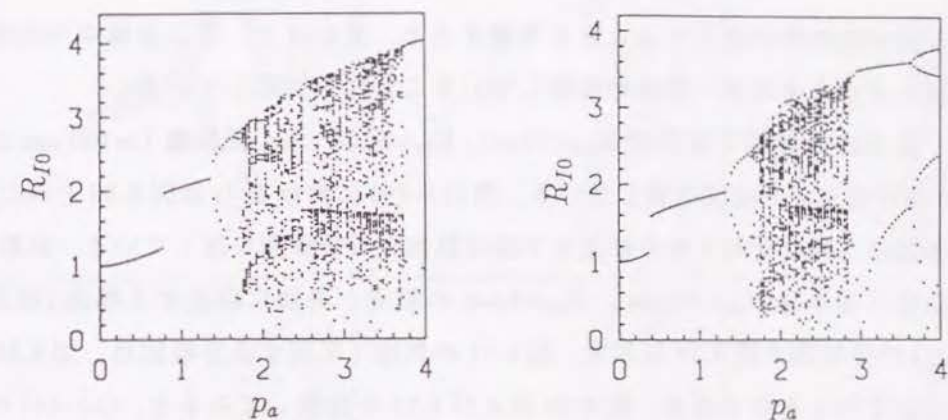
(d)  $f_d=300.09$  kHz



(e)  $f_d=333.43$  kHz

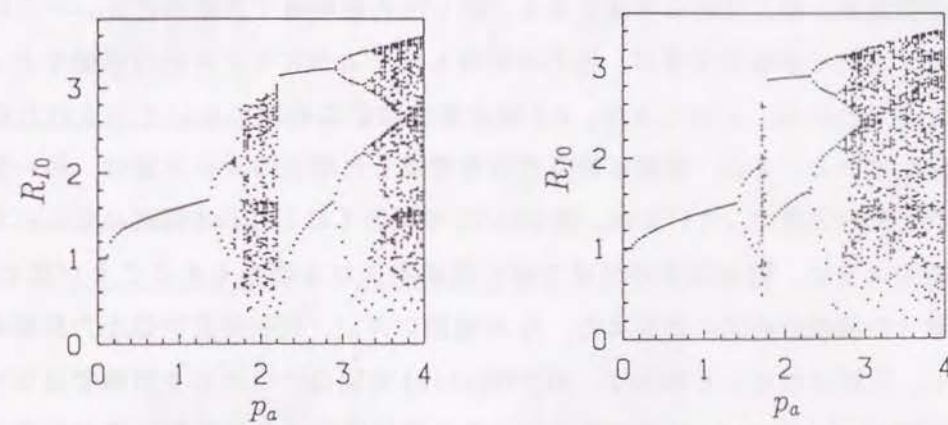
図 6.18 正三角形の頂点に配置された3個の気泡の分岐図

$R_{1e}=R_{2e}=R_{3e}=10\text{ }\mu\text{m}$ ,  $L=100\text{ }\mu\text{m}$ ,  $f_{1N}=304.40\text{ kHz}$ ,  $f_{2N}=f_{3N}=351.46\text{ kHz}$



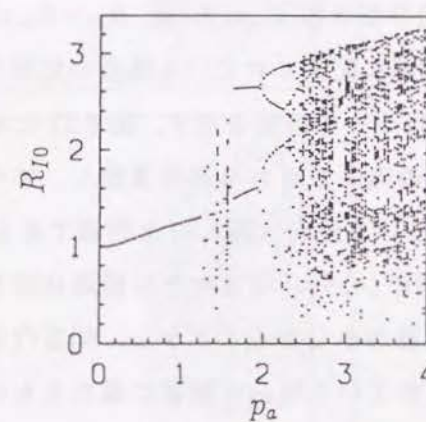
(a)  $f_d=200.06$  kHz

(b)  $f_d=233.40$  kHz



(c)  $f_d=266.75$  kHz

(d)  $f_d=300.09$  kHz



(e)  $f_d=333.43$  kHz

図 6.19 正四面体の頂点に配置された4個の気泡の分岐図

$R_{1e}=R_{2e}=R_{3e}=R_{4e}=10\text{ }\mu\text{m}$ ,  $L=100\text{ }\mu\text{m}$ ,  $f_{1N}=292.46\text{ kHz}$ ,  
 $f_{2N}=f_{3N}=f_{4N}=351.46\text{ kHz}$



と固有振動数が低下することを考慮すると、見かけ上、同じ音場中で初期平衡半径のより大きな単一気泡が振動していることにも対応している。

図 6.20 は初期平衡半径  $R_{1e}=10\text{ }\mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=8\text{ }\mu\text{m}$ , 気泡間距離  $L=100\text{ }\mu\text{m}$  の場合の 2 個の気泡の分岐図を表している。図 (a)~(e) における  $f_d$  は図 6.16 と同じである。各図の上段は気泡 1 の分岐図を下段は気泡 2 の分岐図を表している。比較のため、初期平衡半径  $R_{1e}=10\text{ }\mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=8\text{ }\mu\text{m}$  の気泡が単独に存在する場合 (相互作用なし) の分岐図を図 6.21 に示す。図 6.21 の気泡 1 に関する分岐図は、図 6.16(a)~(e) と全く同じものである。図 6.20 および 6.21 を比較してみると、(a)~(e) のいずれの図においても単一気泡の場合にはそれぞれ異なる圧力振幅値で周期倍化していた気泡が、相互作用を考慮すると、同じ圧力振幅値で周期倍化し、一方の気泡がカオス的な挙動を示せば、他方の気泡も同じようにカオス的な挙動をとっていることがわかる。このことは、6.2 節の周波数応答曲線において示された結果と一致している。また、全般に相互作用を考慮した場合のカオス域は、単一気泡の場合と比べて広がっているが、図 6.21(b) の気泡 1 の  $3 < p_a < 4$  周辺に見られるカオス域のように、相互作用の効果で逆に周期的になる場合もあることが認められる。単一気泡の分岐図にみられた、 $f_d$  の増加に伴い、分岐構造が低圧力振幅側へ移動し、圧縮されていく傾向は、図 6.20(a),(b) の場合にはあまり明確ではないが、図 6.20(c)~(e) では  $f_d$  が増加するにつれて周期倍化する圧力振幅値が低下していることが確認される。

図 6.22 は図 6.22(f) に示すように、初期平衡半径  $R_{1e}=10\text{ }\mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=R_{3e}=8\text{ }\mu\text{m}$  の気泡が気泡間距離  $100\text{ }\mu\text{m}$  で正三角形の頂点に配置されている場合の気泡の分岐図である。気泡配置の対称性から気泡 2,3 は同一の挙動を示す。図 6.22 においても一つの気泡が  $m$  周期運動していれば、その他の気泡も  $m$  周期運動し、すべての気泡は同じ圧力振幅値でカオス状態に至るという傾向は図 6.20 と同様である。また、図 6.22 を図 6.20 と比較してみると、両者の (c)~(e) には大きな相違は認められないが、(a),(b) にはカオス域の広がりや相違がみられることから、相互作用の効果は共振振動数よりも低い振動数で駆動されている場合に顕著に現れるものと考えられる。

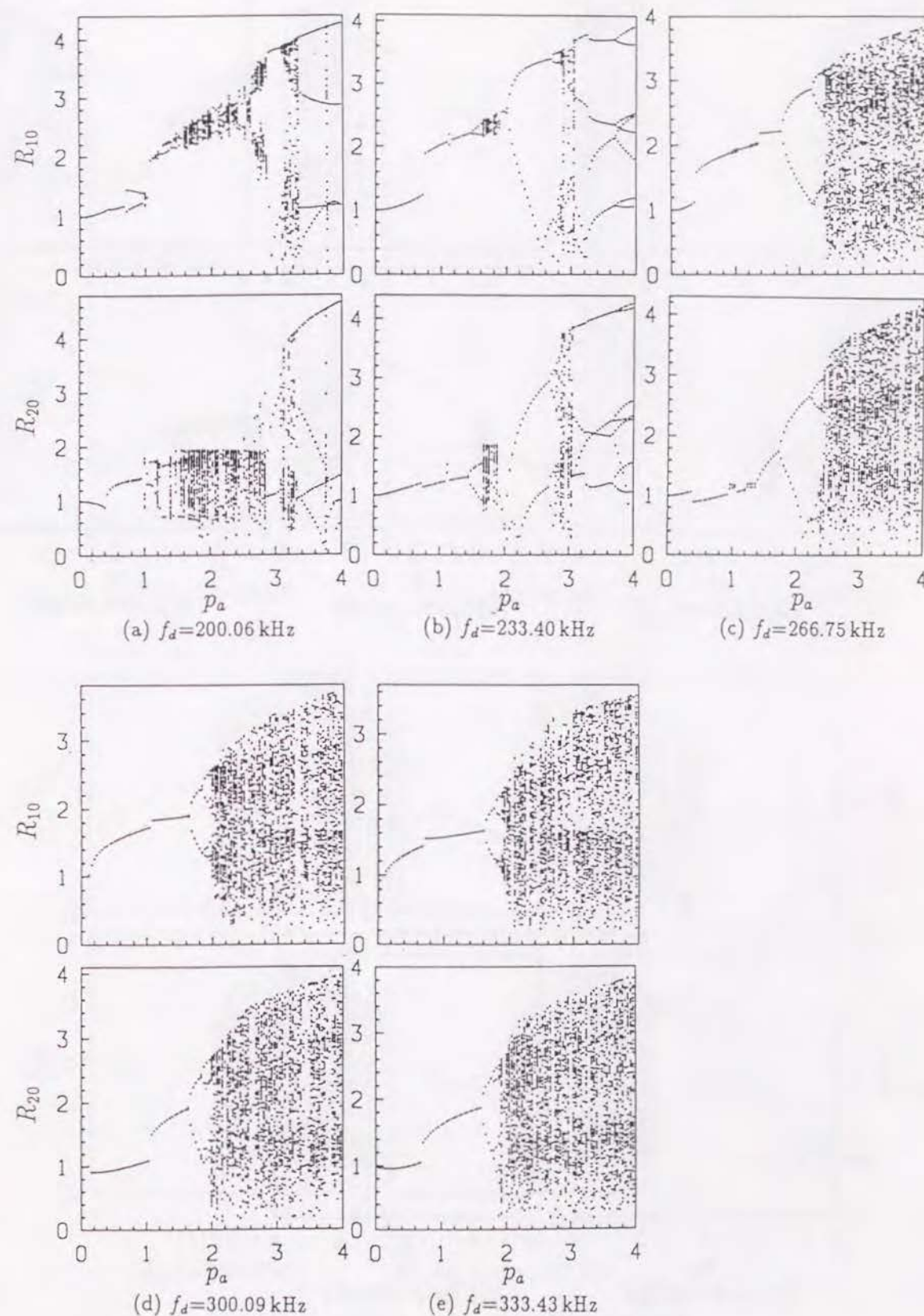


図 6.20 2 個の気泡の分岐図

$R_{1e}=10\text{ }\mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=8\text{ }\mu\text{m}$ ,  $L=100\text{ }\mu\text{m}$ ,  $f_{1N}=331.31\text{ kHz}$ ,  $f_{2N}=426.31\text{ kHz}$



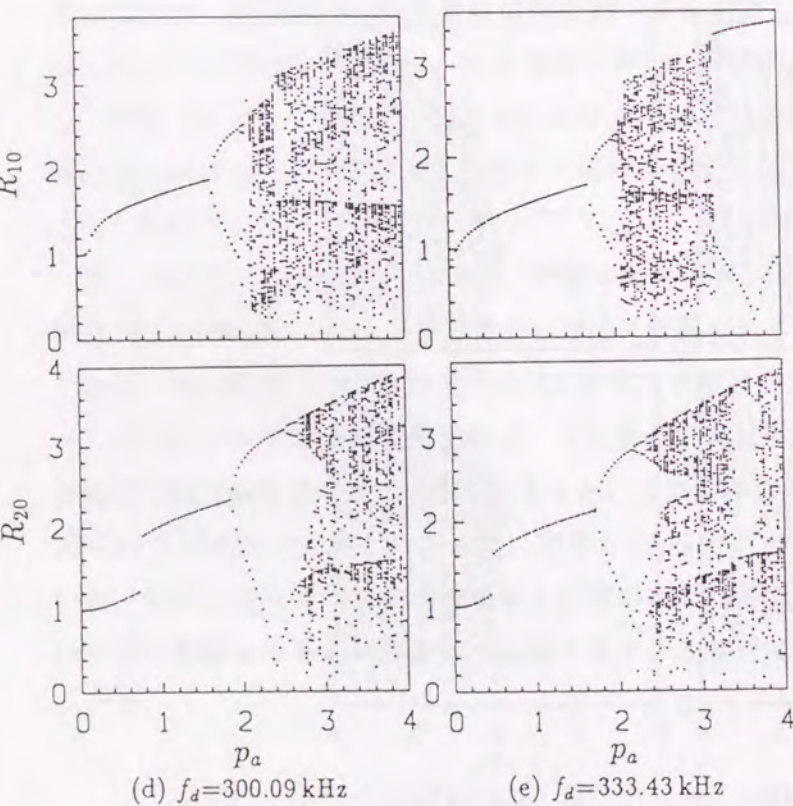
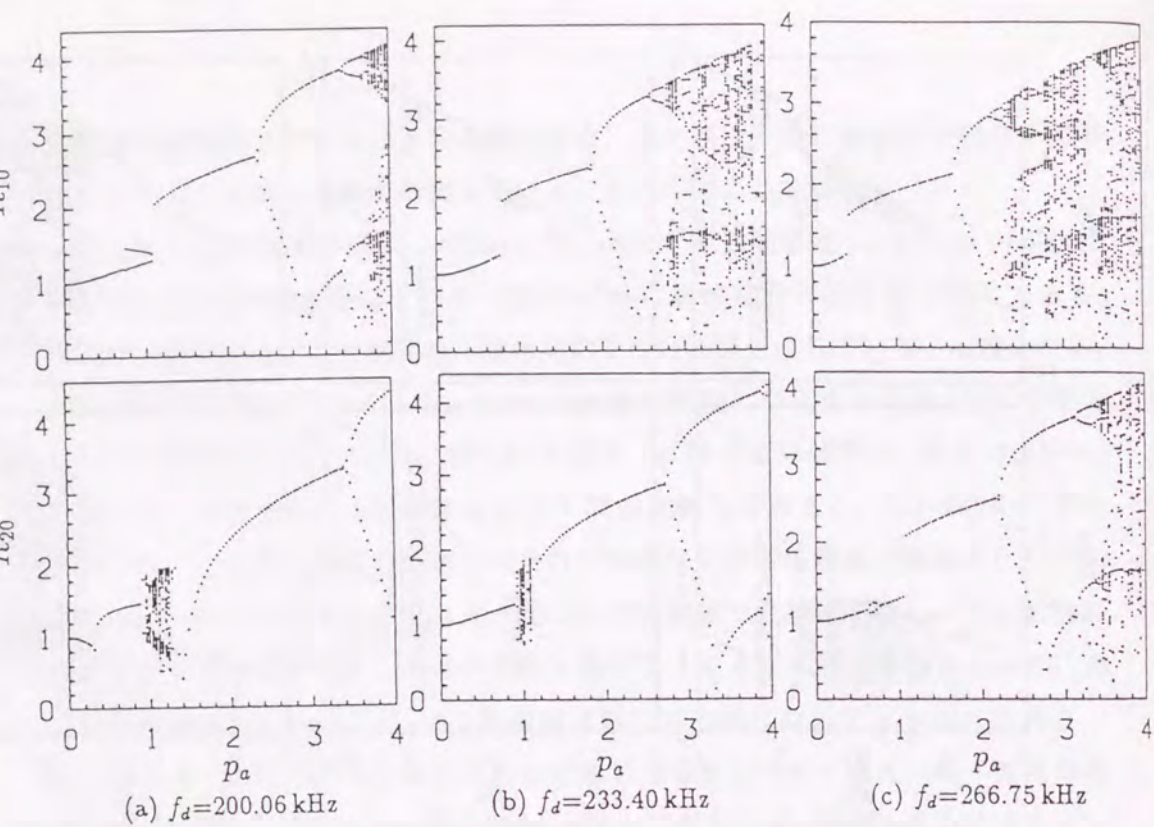
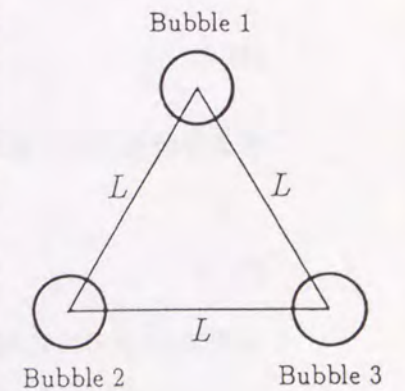
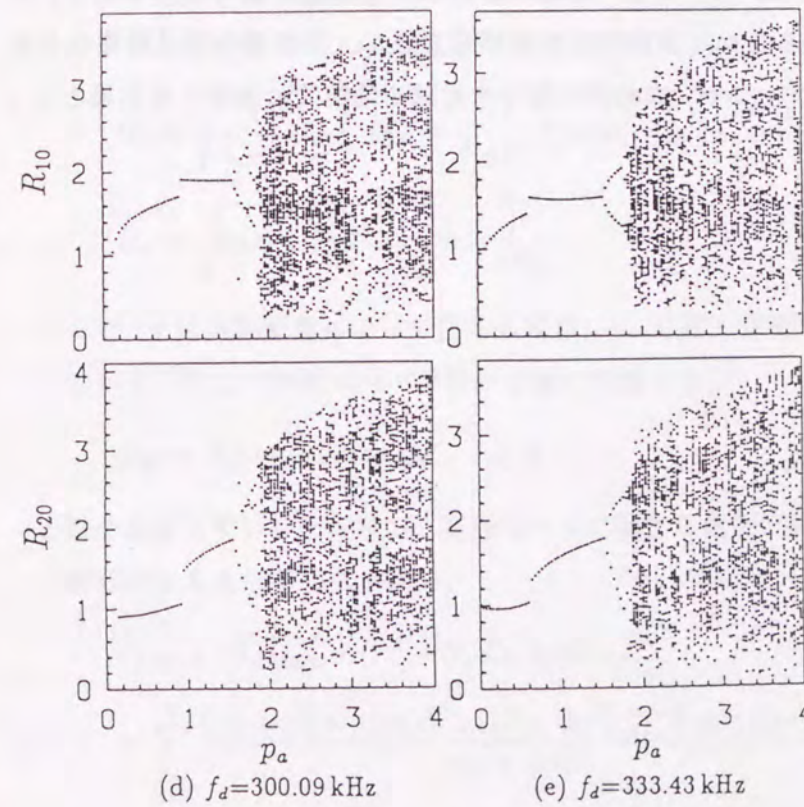
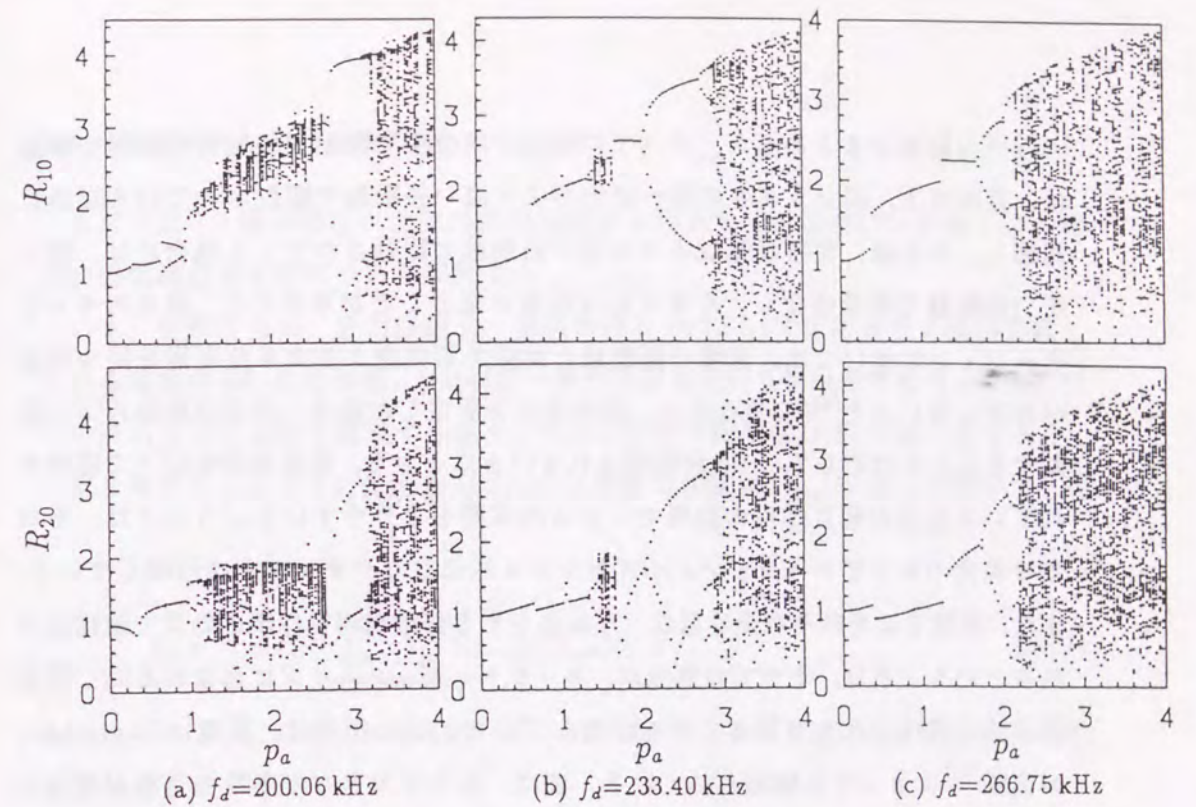


図 6.21 単一気泡の分岐図

$R_{1e}=10\ \mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=8\ \mu\text{m}$ ,  $f_{1N}=333.43$  kHz,  $f_{2N}=421.90$  kHz



(f) 気泡配置

図 6.22 正三角形の頂点に配置された 3 個の気泡の分岐図

$R_{1e}=10\ \mu\text{m}$ ,  $R_{2e}=R_{3e}=8\ \mu\text{m}$ ,  $L=100\ \mu\text{m}$ ,  $f_{1N}=328.83$  kHz,  $f_{2N}=414.75$  kHz,  $f_{3N}=439.85$  kHz



以上の結果をまとめると、すべての気泡が同位相で運動する場合の気泡の挙動は、見かけ上、同じ大きさの単一気泡がより高い振動数で駆動されている場合に対応し、その際、共振振動数よりも低い振動数で駆動されている場合には、低い圧力振幅値で周期倍化し、カオス的な状態に至ることが示された。現実のキャビテーションにおいては、音場の振動数と共振する気泡より大きな半径を持つ気泡が存在しないこと<sup>(8)</sup>(このことは、気泡半径を固定した場合、共振振動数以下で駆動することに対応している)が観測されていることから、共振振動数以下で駆動されている気泡が相互作用の効果でカオスの挙動をとりやすいということは、それだけ現実のキャビテーションノイズがカオス的になりやすいことを示唆している。また、単独ではそれぞれ全く異なった振動をする気泡が相互作用の効果で組織化されるということは、すべての気泡が、キャビテーションノイズに含まれる同じ振動数成分の発生源になり得ることを示唆している。この傾向は、実際に Lauterborn の実験<sup>(12)</sup>によっても観測されている。彼は、異なる大きさの多数の気泡が存在するキャビテーション場においても、音場の振動数の 1/2 倍のサブハーモニック成分が明確に現れているという実験結果を解釈する際に、気泡場の自己組織化が起こっていると推測しているが、本結果は彼らの推論を理論的に裏付ける結果となっている。

#### 6.4 音場中での気泡の安定性

本節では 3.4 節で得られた気泡群の方程式を用いて、正弦波状に変動する音場中での気泡の安定性について解析する。

いま、初期圧力  $p_0$ 、圧力振幅  $p_a$ 、角振動数  $\Omega_d (=2\pi f_d)$  で正弦波状に圧力変動している音場中(式(6.4)参照)で気泡群が微小振動している状況を考える。なお、以下の解析では気泡群を構成する個々の気泡の初期平衡半径は  $R_e$  で同一とする。

第 3 章で示したように気泡表面  $S_I = 0$  は球面調和関数  $Y_{nm}(\theta_I, \psi_I)$  を用いて

$$S_I = r_I - R_I = 0, \quad R_I = R_{I0}(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{Inm}(t) Y_{nm}(\theta_I, \psi_I) \quad (6.24)$$

と与えられる。ここで、 $t$  は時間、 $R_{I0}(t)$  は球形モード、 $R_{Inm}(t)$  は球形からの変動量を表している。

$N$  個の気泡が微小振動しているものとし、運動方程式の線形化を行うと、球形モードおよび変形モードの固有振動数 ( $\Omega_0$  および  $\Omega_n$ ) は次のように与えられる。

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{1+\chi}} \Omega_{00}, \quad \Omega_{00} = \sqrt{\frac{1}{\rho R_e^2} \left\{ 3\gamma(p_0 - p_v) + \frac{2\sigma(3\gamma-1)}{R_e} \right\}} \quad (6.25)$$

$$\Omega_n = \sqrt{(n-1)(n+1)(n+2) \frac{\sigma}{\rho R_e^3}} \quad (6.26)$$

ここで、 $\chi$  は気泡配置によって決まる定数、 $\Omega_{00}$  は単一球形気泡の固有振動数を表している。次に、球形モード半径が音場に同期して

$$R_{I0} = R_e(1 + \tilde{\delta}_{I0} \sin \Omega_d t), \quad \tilde{\delta}_{I0} \ll 1 \quad (6.27)$$

と微小振動していると仮定し、変形モードに関する運動方程式(3.62)を  $\tilde{\delta}_{I0}$  に対して線形化すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} & \ddot{\tilde{\delta}}_{Inm} + 2\tilde{\beta}_n \dot{\tilde{\delta}}_{Inm} + (\Omega_n^2 + \tilde{\alpha}_n \sin \Omega_d t) \tilde{\delta}_{Inm} \\ &= \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{(2n+1)(n-|m|)! \bar{Y}_{nm}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \varepsilon_{IJ}^{n+1} \tilde{\delta}_{J0} \Omega_d^2 \sin \Omega_d t}{(n+|m|)!} \end{aligned} \quad (6.28)$$



ここで,

$$\tilde{\alpha}_n = \left\{ (n+1/2)\Omega_d^2 - 3\Omega_n^2 \right\} \tilde{\delta}_{I0}, \quad \tilde{\beta}_n = \nu(n+2)(2n+1)/R_e^2$$

$$\tilde{\delta}_{Inm} = R_{I0}^{3/2} R_e^{-5/2} R_{Inm}, \quad \varepsilon_{IJ} = R_e/L_{IJ} \quad (6.29)$$

ただし,  $\nu\tilde{\delta}_{I0}\tilde{\delta}_{Inm}$ ,  $\nu\tilde{\delta}_{I0}\tilde{\delta}_{Inm}\Omega_d$ ,  $\nu\tilde{\delta}_{J0}\varepsilon_{IJ}^{n+1}\Omega_d$  を含む項および  $G_{Inm}$  は無視した. 式(6.28)は  $\varepsilon_{IJ} \rightarrow 0$  とすると単一気泡の線形化された安定方程式 (Mathieu 方程式) に帰着する<sup>(13)</sup>. Mathieu 方程式は

$$\Omega_d = \frac{2\Omega_n}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.30)$$

の場合に指数関数的に増大するパラメーター励振を起こすことが知られている<sup>(26)</sup>. ただし, 式(6.30)の  $k \geq 2$  の励振は  $\tilde{\delta}_{I0}^2$  以上のオーダーで引き起こされるため, 線形化を施した式(6.28)においては議論できない. そこで, 以下では  $k=1$  のみ考える.

強制振動項を無視し,  $\Omega_d = 2\Omega_n$  とすると, 粘性散逸を考慮した場合のパラメーター励振を起こすしきい値  $\tilde{\delta}_s$  は次式で与えられる<sup>(26)</sup>.

$$\tilde{\delta}_s = \frac{4(2n+1)}{4n-1} \sqrt{\frac{n+2}{n^2-1}} \nu \sqrt{\frac{\rho}{\sigma R_e}} \quad (6.31)$$

$\Omega_d = \Omega_0 = 2\Omega_n$  とすると,  $n$  次の変形モードがパラメーター励振を起こす気泡の平衡半径 ( $= R_{pn}$ ) は

$$R_{pn} = \frac{2\sigma \{2(1+\chi)(n-1)(n+1)(n+2) - (3\gamma-1)\}}{3\gamma(p_0 - p_v)} \quad (6.32)$$

となる. 式(6.31), (6.32) より, パラメーター励振を起こすしきい値は初期平衡半径が大きいほど低下し, また, 初期平衡半径が大きな気泡ほど高次の変形モードのパラメーター励振が起こりやすいことがわかる. しかし, 式(6.28)の場合には気泡間の相互作用に起因する強制振動項が加わっているために, 気泡の変形機構は複雑になる.

図 6.23~6.25 は  $x$ - $z$  平面上の一边  $10 \times R_e$  の正方形の頂点に配置された 4 個の気泡 (図 6.23(d)) の振動の様子を表している. 気泡配置の対称性から  $z$  軸上の正の位置にある気泡の運動について考える. この気泡にとって, 変形モードの  $m=0$  成分は軸対称変形を,  $m \neq 0$  成分は軸対称変形からのずれを表している. なお, 変形モードは式(3.7)で示した実数表示の式

$$R_{Inm}^{(c)} = R_{Inm} + R_{In(-m)}$$

$$R_{Inm}^{(s)} = i(R_{Inm} - R_{In(-m)}), \quad 1 \leq m \leq n \quad (6.33)$$

で表現されている. ただし, 図 6.23(d) の配置では  $R_{Inm}^{(s)}$  は常に零である. 図 6.23 は  $R_e=10.1\mu\text{m}$ ,  $p_a=0.1$ ,  $f_d=292.8\text{kHz}$ , 図 6.24 は  $R_e=36.4\mu\text{m}$ ,  $p_a=0.04$ ,  $f_d=78.30\text{kHz}$ , 図 6.25 は  $R_e=83.2\mu\text{m}$ ,  $p_a=0.01$ ,  $f_d=33.97\text{kHz}$  の場合で, これらの値はそれぞれ式(6.32)で定義される 2, 3, 4 次の変形モードが励振しやすい初期平衡半径に設定されている. そのほかの計算条件は前節と同様である. 計算は式(3.60)~(3.62)の運動方程式を数値的に解いたもので,  $|(R_I - R_{I0})/R_{I0}| \leq 1/3$ ,  $R_e/L_{IJ} \leq 1/5$  の範囲で行った. なお, 図 6.23~6.25 の横軸は  $R_e\sqrt{\rho/p_0}$  で, 縦軸は  $R_e$  で無次元化されている.

図 6.23 では, 2 次モードがパラメーター励振を起こしやすい半径に設定したにも関わらず,  $R_{I20}$ ,  $R_{I22}^{(c)}$  はともに球形モード (図 6.23(a)) とほぼ同じ振動数で振動

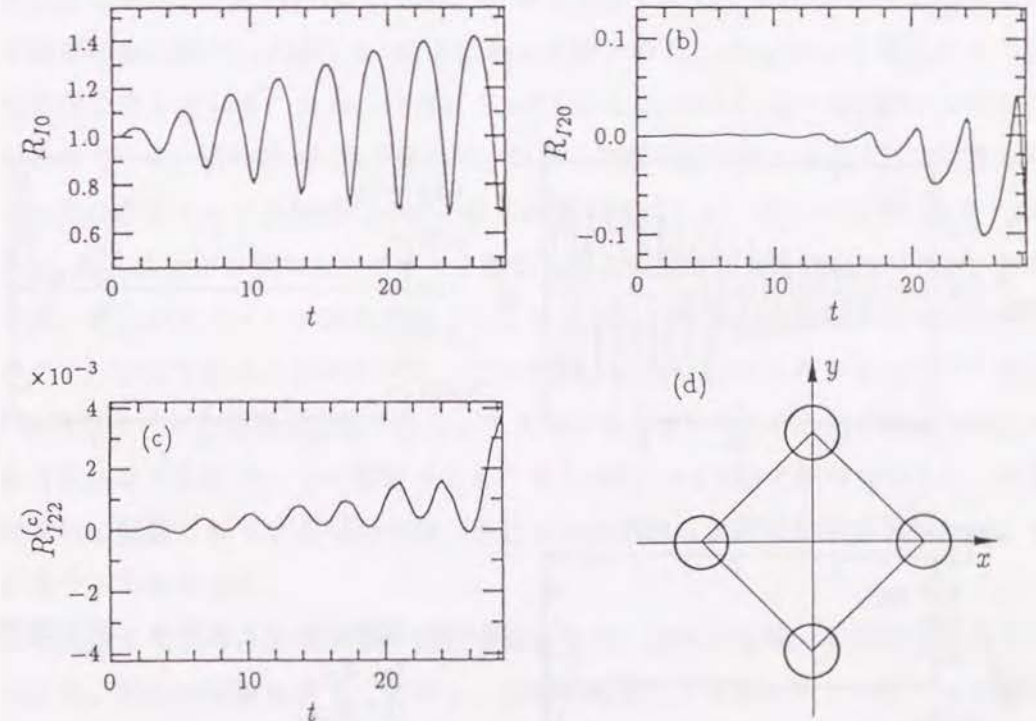


図 6.23 球形モードと変形モードの時間変化

(a)  $R_{I0}$ , (b)  $R_{I20}$ , (c)  $R_{I22}^{(c)} (= R_{I22} + R_{I2(-2)})$ , (d) 気泡配置



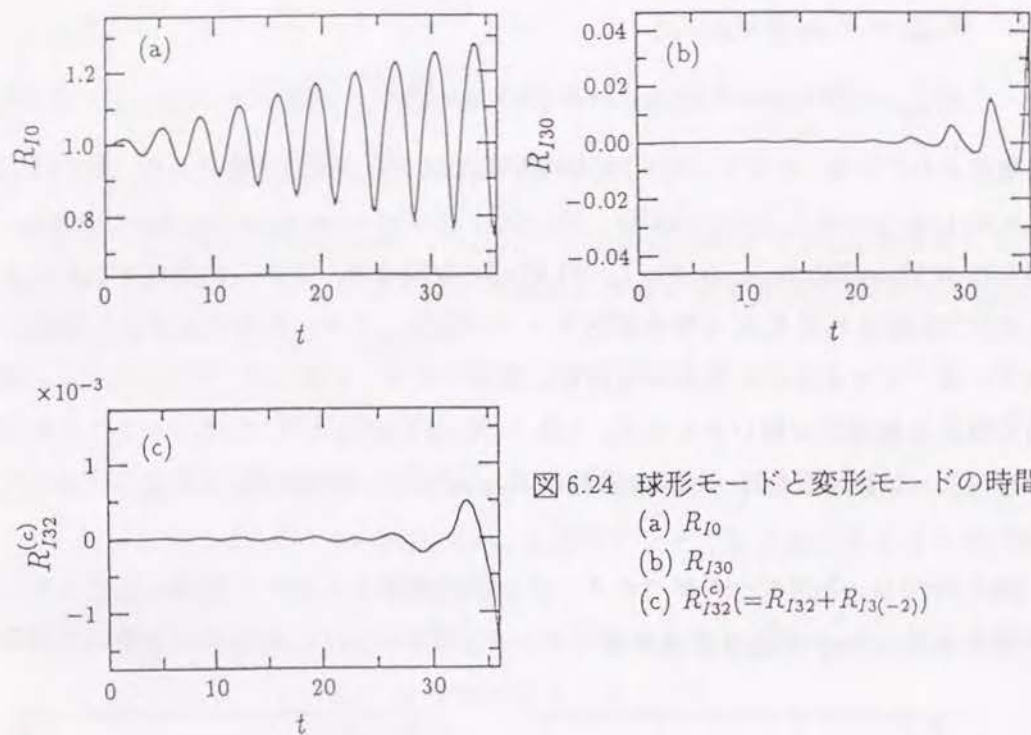


図 6.24 球形モードと変形モードの時間変化

- (a)  $R_{10}$   
 (b)  $R_{130}$   
 (c)  $R_{132}^{(c)} (=R_{132} + R_{13(-2)})$

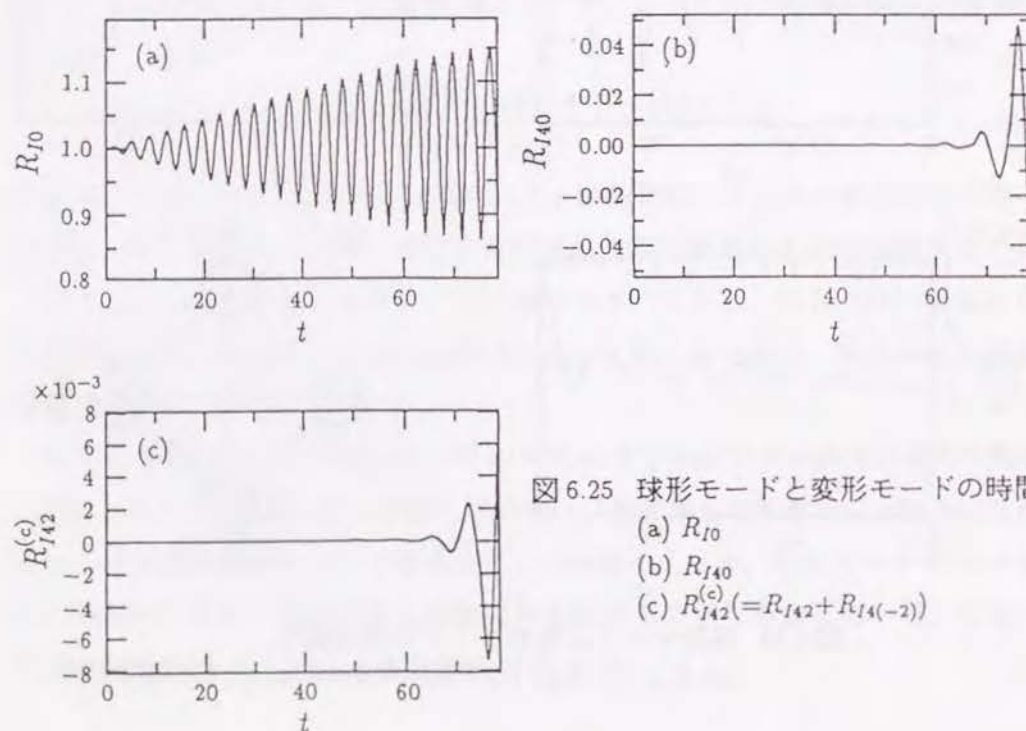


図 6.25 球形モードと変形モードの時間変化

- (a)  $R_{10}$   
 (b)  $R_{140}$   
 (c)  $R_{142}^{(c)} (=R_{142} + R_{14(-2)})$

し、パラメーター励振を起こさずに変形が助長されていることがわかる。一方、図 6.24 の場合では、 $R_{130}$  は明らかなパラメーター励振を起こさず、 $R_{132}^{(c)}$  が  $R_{10}$  の周期 (=音場の周期) の 2 倍の周期で振動し、パラメーター励振を起こしている。図 6.25 では、 $R_{140}$ 、 $R_{142}^{(c)}$  がともにパラメーター励振を起こしていることがわかる。このことから気泡間の相互作用を考慮した場合には、パラメーター励振のみで気泡の不安定が助長されるわけではないことがわかる。高次モードほどパラメーター励振を起こしやすいのは、式 (6.31) で定義されるしきい値が高次モードほど低下することおよび各モードに及ぼす相互作用の効果 (強制振動項) が  $O(\varepsilon_{IJe}^{n+1})$  で小さくなることによる。  $m \neq 0$  成分が、 $m = 0$  成分に比べてパラメーター励振を起こしやすいのは、式 (6.28) からわかるように相互作用の効果が  $m$  が大きくなるほど  $(n - |m|)! / (n + |m|)!$  のオーダーで小さくなることによる。

図 6.26 に  $x-z$  平面上の平面上の一辺  $10\sqrt{3}/3$  の正三角形の頂点と中心に配置された同じ大きさの 4 個の気泡 (図 6.26(g)) の球形モードおよび 2 次の変形モードの時間変化を示す。図 (a),(c),(e) は中心にある気泡 1 の  $R_{10}$ 、 $R_{120}$  および  $R_{122}^{(c)}$  成分の時間変化を、図 (b),(d),(f) は  $z$  軸上にある気泡 2 の  $R_{20}$ 、 $R_{220}$  および  $R_{222}^{(c)}$  成分の時間変化を表している。なお、計算は  $R_e = 9.91 \mu\text{m}$ 、 $p_a = 0.07$ 、 $f_d = 302.3 \text{ kHz}$  の条件で行われている。図 6.23~6.25 と同様に、気泡の初期平衡半径は式 (6.32) で定義される 2 次の変形モードが励振しやすい値に設定されている。図 6.26 より、気泡 1 は、 $R_{120}$ 、 $R_{122}^{(c)}$  成分がいずれもパラメーター励振を起こし変形が助長されているが、気泡 2 は、 $R_{222}^{(c)}$  がパラメーター励振を起こしつつあるもののその振幅は気泡 1 に比べて小さく、安定であることがわかる。この原因は図 (a),(b) からわかるように、気泡 1 の球形モードの振幅が気泡 2 に比べて大きくなっているためと考えられる。中心にある気泡ほど球形モードの振幅が大きくなるのは、5.6.2 節で述べたように、気泡が層状に配置されている場合には、中心にある気泡ほど相互作用の効果で激しく収縮するためである。

以上のことから、音場中での気泡の安定性は、音場の振幅、振動数はもちろんのこと、気泡の配置に大きく依存し、初期の変形だけに限ってもパラメーター励振の機構だけで安定性が議論できないことがわかる。特に、気泡の変形が球形モードの振動形態に依存することを考慮すると、安定性を考える上でも相互作用が球



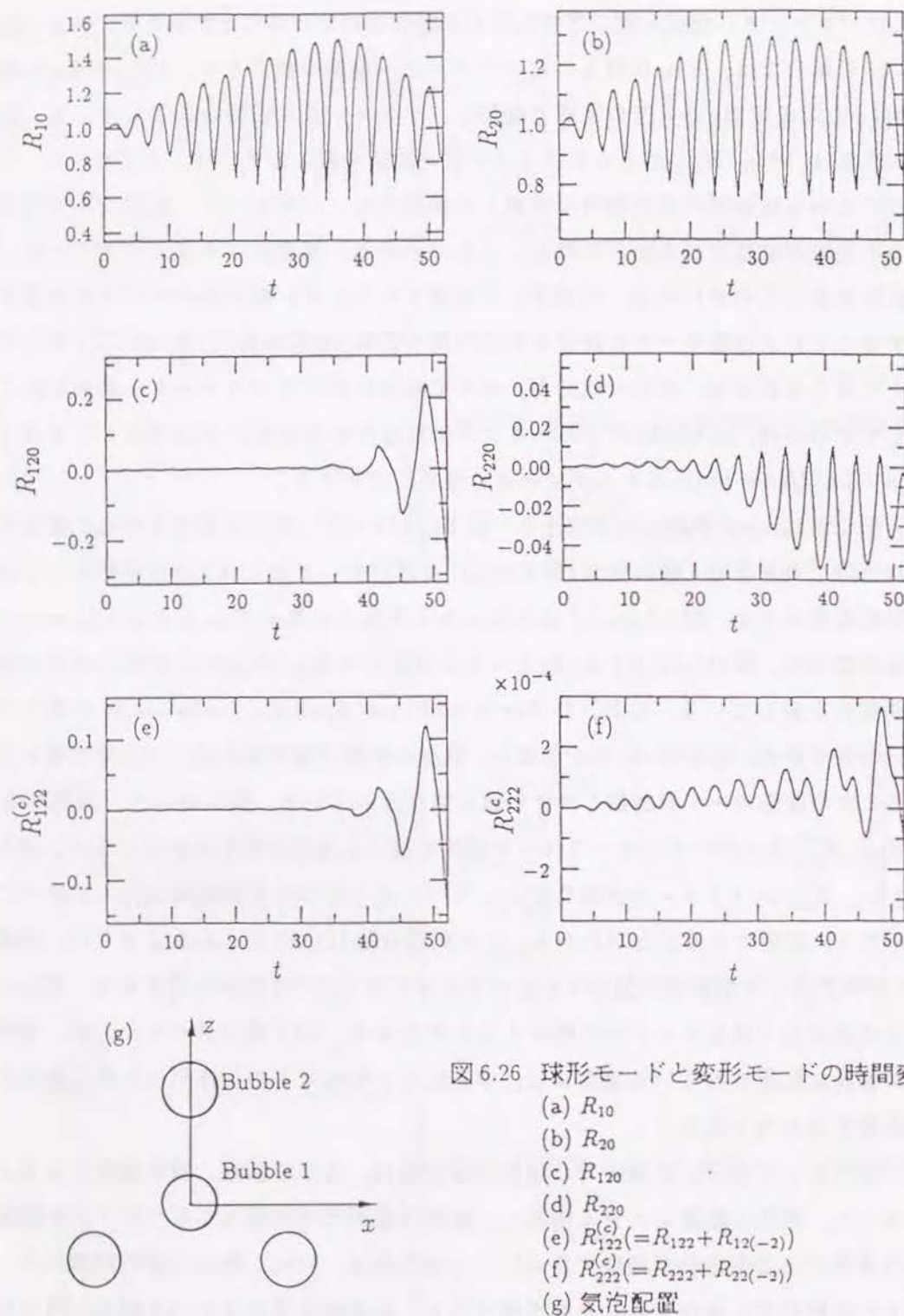


図 6.26 球形モードと変形モードの時間変化  
 (a)  $R_{10}$   
 (b)  $R_{20}$   
 (c)  $R_{120}$   
 (d)  $R_{220}$   
 (e)  $R_{122}^{(c)} (= R_{122} + R_{12(-2)})$   
 (f)  $R_{222}^{(c)} (= R_{222} + R_{22(-2)})$   
 (g) 気泡配置

形モードに及ぼす効果を把握することが重要と考えられる。

## 6.5 結 言

本章では音場中での気泡群の運動方程式を解析し、以下のことが明らかとなった。

(1) 相互作用を考慮した場合の気泡の周波数応答曲線および分岐図は、単一気泡の周波数応答曲線と大きく異なる。

(2) 初期半径の小さな気泡のハーモニック振動は、単一気泡の場合と比べて、低い圧力振幅でウルトラハーモニック振動に移行する。

(3) ウルトラハーモニック振動が発生する圧力振幅のしきい値は気泡間の相互作用により低下する。

(4) 一方の気泡がウルトラハーモニック振動を開始すると、もう一方の気泡も同時にウルトラハーモニック振動を開始する。そのため、2 個の気泡は同時にキャビテーションノイズにおける音場の振動数の  $1/2$  倍のサブハーモニック成分の原因となり得る。

(5) 複数の気泡の場合にも、圧力振幅が大きくなるにつれて、気泡振動は周期倍化し、カオス状態に至る。その際、すべての気泡は同じ圧力振幅値で周期倍化する。すなわち、ある気泡が  $m$  周期運動していれば、ほかの気泡も  $m$  周期運動する。

(6) 相互作用により個々の気泡の独立な運動は抑制され、気泡群は組織化された挙動をとる。

(7) 音場の振動数が増加すると、気泡の分岐構造は高圧力振幅側から低圧力振幅側に移動し、圧縮されていく。

(8) すべての気泡が同位相で振動する系では、系の最低次の固有振動数が単一気泡の場合に比べて低下する。その結果、分岐構造は単一気泡が実際より高い振動数で駆動された場合と同様の傾向を示す。

(9) すべての気泡が同位相で振動する系において、気泡が共振振動数よりも低い振動数で駆動されている場合には、気泡振動は、単一気泡の場合と比べて低い圧力振幅値で周期倍化し、カオス状態に至る。

(10) 気泡表面の不安定は、高次の変形モードになるほど、パラメータ励振の機構により助長されやすい。



(11) 低次の変形モードは、気泡間の相互作用により不安定が助長される場合がある。

(12) 気泡の安定性は、気泡の配置に大きく依存する。

## 第6章の参考文献

- (1) 超音波技術便覧, 日刊工業新聞社 (改訂2版), (1968).
- (2) Esche, R., *Acustica*, **AB 2**(1952), 208.
- (3) Güth, W., *Acustica*, **6**(1956), 532.
- (4) Neppiras, E. A., *J. Sound Vib.*, **10**(1969), 176.
- (5) Neppiras, E. A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **46**(1969), 587.
- (6) Eller, A., and Flynn, H. G., *J. Acoust. Soc. Am.*, **46**(1969), 722.
- (7) Prosperetti, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **57**(1975), 810.
- (8) Lauterborn, W., *J. Acoust. Soc. Am.*, **59**(1976), 283.
- (9) Schuster, H. G., *Deterministic Chaos*, (1984), Physik-Verlag.
- (10) Lauterborn, W., and Cramer, E., *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1445.
- (11) Lauterborn, W., et al., *Proc. Int. Symp. on Cavitation*, Sendai, **2**(1986), 9.
- (12) Lauterborn, W., *Frontiers in Physical Acoustics*, (1986), 124. North-Holland.
- (13) Hsieh, D. Y., and Plesset, M. S., *J. Acoust. Soc. Am.*, **33**(1961), 206.
- (14) Kamath, V., and Prosperetti, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **85**(1989), 1538.
- (15) Matsumoto, Y., and Watanabe, M., *JSME Int. J.*, Series II, **32**(1989), 157.
- (16) Shima, A., *J. Basic Eng.*, **93**(1971), 426.
- (17) Prosperetti, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **56**(1974), 878.
- (18) Cramer, E., *Cavitation and Inhomogeneities in Underwater Acoustics*, (1980), 54, Springer-Verlag.
- (19) Lauterborn, W., and Suchla, E., *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 2304.
- (20) Keller, J. B., and Miksis, M., *J. Acoust. Soc. Am.*, **68**(1980), 628.
- (21) Prosperetti, A., and Lezzi, A., *J. Fluid Mech.*, **168**(1986), 457.
- (22) Kirkwood, J. G., and Bethe H. A., *OSRD Rep.*, (1942), 588.
- (23) Gilmore, F. R., *Calif. Inst. of Tech. Hydrodyn. Lab. Rep.*, **26-4**(1952).
- (24) Hickling, R., and Plesset M. S., *Phys. Fluids*, **7**(1964), 7.
- (25) Lezzi, A., and Prosperetti, A., *J. Fluid Mech.*, **185**(1987), 289.
- (26) 戸田・渡辺, 非線形力学, (1984), 共立出版.



## 第7章 結 論

本論文は、多数の気泡が複雑に干渉し合いながら成長・崩壊を繰り返している現実のキャビテーション現象を把握するために、気泡間の相互作用を考慮した気泡群の力学を扱い、相互作用がキャビテーション現象に及ぼす様々な効果を解析したものである。本論文で得られた成果はすでに各章の結言において論述されているため、ここでは、そのうちの主要な成果について要約するにとどめる。

まず、第1章では、気泡力学に関する従来の研究を概説し、本研究の目的ならびに意義について論述した。

第2章では、相互作用を解析する第一歩として、2個の球形ならびに非球形気泡の運動方程式が導出された。第2章で最初に得られた非圧縮性・非粘性流体中での2個の気泡の運動方程式には、気泡間の相互作用に起因する気泡の並進運動および変形が考慮されており、後にこれらの運動方程式に液体の粘性および圧縮性の効果が考慮された。

第3章では、第2章で得られた2個の気泡の運動方程式を拡張し、液体中の任意の位置に分布している $N$ 個の気泡の運動方程式が導出された。第3章で得られた非圧縮性流体中の気泡群の運動方程式には、気泡の3次元並進運動・変形、および液体の粘性の効果が考慮された。また、気泡群自由振動に関する特性方程式が導かれ、気泡群の最低次の固有振動数が、気泡間の相互作用が強まるにつれて低下することが示された。さらに、圧力場の時間変動を考慮した圧縮性流体中での球形気泡群の運動方程式が導出された。以上、第2,3章で得られた気泡群の運動方程式は、特別な場合としてこれまでに導出された単一気泡ならびに2個の球形気泡の運動方程式に帰着することが示された。

第4章では、境界要素法による非圧縮性・非粘性流体中での気泡の軸対称運動の解析に必要な定式化が行なわれ、本数値計算法は理論解析結果と比較して十分な精度があることが示された。

第5章では、第2~4章で得られた気泡群の運動方程式および境界要素法の関係式を用いて、気泡周囲の液体圧力が初期の平衡圧力からステップ状に上昇あるいは低下するときの気泡の崩壊問題および成長問題を解析した。その結果、相互作

用を考慮した場合の気泡の変形機構、相互作用に起因する液体の圧力上昇の機構ならびに気泡運動に及ぼす液体の粘性・圧縮性の効果が明らかとなった。さらに、くぼみあるいは突起を有する壁面近傍での気泡の崩壊挙動が解析され、壁面形状が気泡変形ならびに発生圧力に及ぼす効果が示された。

第6章では、音場中での気泡群の非線形振動が解析され、相互作用が個々の気泡の振動特性に及ぼす効果ならびに相互作用とキャビテーションノイズとの関連が論述された。

本研究でなされた一連の解析を通して、気泡間の相互作用が現実のキャビテーション現象において重要な役割を果たすことが明らかとなった。しかし、本研究で行った解析もキャビテーション現象の一端を省みたに過ぎず、まだまだ、現実のキャビテーション現象には多くの解明すべき問題が残されている。最後に、今後に残された主な研究課題を論述することにより締めくくりにする。

(1) 気泡内気体の流動および気液界面での熱・物質移動が気泡の並進運動ならびに変形に及ぼす効果を解明する。特に、界面での熱・物質移動は、気泡の問題に限らず相変化を伴う自由界面で物理現象としても非常に興味深い問題である。

(2) 気泡変形が大きくなり、マイクロジェットが発生した後の気泡の挙動を解明する。

(3) 上記(1),(2)とも関連して、気泡の分裂および合体の機構を解明する。

(4) 一様でない、圧力場・流れ場における気泡の挙動を解明する。この問題は、最近問題になっている衝撃波フォーカシングに伴い発生するキャビテーションの解析、ならびに気泡の数密度が比較的大きな状況での音場中における気泡の非線形振動などを扱う際に重要となつてこよう。

(5) 壁面の材料特性を考慮して、気泡の挙動を解析する。材料特性を考慮した解析は、キャビテーションエロージョンの機構の解明のみならず、生体中でのキャビテーションを考える上で重要である。

(6) 相互作用を考慮した気泡流モデルを構築し、実際のキャビテーションを含むポンプ内流動などに適用し、流体機械の性能予測を行う。

以上述べた6点は、どれも解析的に取り扱うには、非常に困難な問題である。気泡の運動を扱う際の困難さは、いずれの場合にも大きく変形する自由境界の取り



扱いに起因する。そのため、今後、この種の問題の解析には、これまでで以上に適切なモデルの設定と洗練された数値解析的な手法が必要になるものと考えられる。こうした点を踏まえて、筆者は少しでもキャビテーション現象の本質に迫りたいと考えている。

## 謝 辞

本研究を遂行するにあたり、終始懇切な御指導、御鞭撻を賜りました京都大学工学部 赤松映明教授に衷心より感謝の意を表します。また、有益なる御助言、御討論を賜りました富山県立大学工学部 藤川重雄助教授に深く感謝致します。なお、数値計算ならびに図面作成には小川正裕君、山根総一郎君をはじめとする研究室諸氏の協力を賜りました。ここに、付記し感謝の意を表します。



$$G_{I0} = \frac{3v_{I0r}^2}{4} + 3v_{I1r}v_{I(-1)r} - \frac{v_{I0}^2}{2} - 2v_{I1}v_{I(-1)} - \sum_{j=1}^N \sum_{m=-1}^1 \frac{\dot{q}_{J1m}}{L_{IJ}^2} Y_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} G_{I10} = & v_{I0r} \left\{ \frac{9\dot{R}_{I20}}{5} - \frac{9\dot{R}_{I0}R_{I20}}{5R_{I0}} - \sum_{j=1}^N \frac{6R_{I0}q_{J0}}{L_{IJ}^3} P_2(\cos \theta_{IJ}) \right\} \\ & + v_{I1r} \left\{ \frac{27\dot{R}_{I2(-1)}}{5} - \frac{27\dot{R}_{I0}R_{I2(-1)}}{5R_{I0}} - \sum_{j=1}^N \frac{3R_{I0}q_{J0}}{L_{IJ}^3} Y_{21}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \right\} \\ & + v_{I(-1)r} \left\{ \frac{27\dot{R}_{I21}}{5} - \frac{27\dot{R}_{I0}R_{I21}}{5R_{I0}} - \sum_{j=1}^N \frac{3R_{I0}q_{J0}}{L_{IJ}^3} \bar{Y}_{21}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \right\} \\ & + \frac{18R_{I20}}{5} \sum_{j=1}^N \frac{\dot{q}_{J0}}{L_{IJ}^2} P_1(\cos \theta_{IJ}) + \frac{27R_{I21}}{5} \sum_{j=1}^N \frac{\dot{q}_{J0}}{L_{IJ}^2} Y_{11}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \\ & + \frac{27R_{I2(-1)}}{5} \sum_{j=1}^N \frac{\dot{q}_{J0}}{L_{IJ}^2} \bar{Y}_{11}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \\ & + 3 \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{L_{IJ}^3} \frac{d}{dt} (R_{I0}q_{J10}) - 3 \sum_{m=-1}^1 \frac{Y_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) P_1(\cos \theta_{IJ})}{L_{IJ}^3} \frac{d}{dt} (R_{I0}q_{J1m}) \right\} \quad (A.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{I1(\pm 1)} = & v_{I0r} \left\{ \frac{27\dot{R}_{I2(\pm 1)}}{10} - \frac{27\dot{R}_{I0}R_{I2(\pm 1)}}{10R_{I0}} - \sum_{j=1}^N \frac{3R_{I0}q_{J0}}{2L_{IJ}^3} \bar{Y}_{2(\pm 1)}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \right\} \\ & - v_{I(\pm 1)r} \left\{ \frac{9\dot{R}_{I20}}{10} - \frac{9\dot{R}_{I0}R_{I20}}{10R_{I0}} - \sum_{j=1}^N \frac{3R_{I0}q_{J0}}{L_{IJ}^3} P_2(\cos \theta_{IJ}) \right\} \\ & + v_{I(\mp 1)r} \left\{ \frac{54\dot{R}_{I2(\pm 2)}}{5} - \frac{54\dot{R}_{I0}R_{I2(\pm 2)}}{5R_{I0}} - \sum_{j=1}^N \frac{3R_{I0}q_{J0}}{2L_{IJ}^3} \bar{Y}_{2(\pm 2)}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{9R_{I20}}{10} \sum_{j=1}^N \frac{\dot{q}_{J0}}{L_{IJ}^2} \bar{Y}_{1(\pm 1)}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) + \frac{27R_{I2(\pm 1)}}{5} \sum_{j=1}^N \frac{\dot{q}_{J0}}{L_{IJ}^2} P_1(\cos \theta_{IJ}) \\ & + \frac{54R_{I2(\pm 2)}}{5} \sum_{j=1}^N \frac{\dot{q}_{J0}}{L_{IJ}^2} Y_{1(\pm 1)}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) + 3 \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{L_{IJ}^3} \frac{d}{dt} (R_{I0}q_{J1(\pm 1)}) \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \sum_{m=-1}^1 \frac{Y_{1m}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \bar{Y}_{1(\pm 1)}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ})}{L_{IJ}^3} \frac{d}{dt} (R_{I0}q_{J1m}) \right\} \quad (A.3) \end{aligned}$$

$$G_{I20} = -\frac{9v_{I0r}^2}{4} + \frac{9v_{I1r}v_{I(-1)r}}{2} \quad (A.4)$$

$$G_{I2(\pm 1)} = -\frac{9v_{I0r}v_{I(\pm 1)r}}{4} \quad (A.5)$$

$$G_{I2(\pm 2)} = -\frac{9v_{I(\pm 1)r}^2}{8} \quad (A.6)$$

$$\begin{aligned} G_{In0} = & -\frac{3(n+1)v_{I0r}}{2} \left\{ \dot{R}_{I(n-1)0} + \frac{(n-2)\dot{R}_{I0}R_{I(n-1)0}}{(2n-1)R_{I0}} \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^N \frac{(n-1)R_{I0}^{n-2}q_{J0}}{L_{IJ}^n} P_{n-1}(\cos \theta_{IJ}) \right\} \\ & + \frac{3(n-1)(n+1)v_{I1r}}{2} \left\{ \dot{R}_{I(n-1)(-1)} + \frac{(n-2)\dot{R}_{I0}R_{I(n-1)(-1)}}{(2n-1)R_{I0}} \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^N \frac{R_{I0}^{n-2}q_{J0}}{nL_{IJ}^n} Y_{(n-1)1}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \right\} \\ & + \frac{3(n-1)(n+1)v_{I(-1)r}}{2} \left\{ \dot{R}_{I(n-1)1} + \frac{(n-2)\dot{R}_{I0}R_{I(n-1)1}}{(2n-1)R_{I0}} \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^N \frac{R_{I0}^{n-2}q_{J0}}{nL_{IJ}^n} \bar{Y}_{(n-1)1}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \right\}, \quad n \geq 3 \quad (A.7) \end{aligned}$$

$$G_{In(\pm m)} = -\frac{3(n+1)(n-m)v_{I0r}}{2n} \left\{ \dot{R}_{I(n-1)(\pm m)} + \frac{(n-2)\dot{R}_{I0}R_{I(n-1)(\pm m)}}{(2n-1)R_{I0}} \right.$$



$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{(n-1)(n-m-1)!}{(n+m-1)!} \frac{R_{I0}^{n-2} q_{J0}}{L_{IJ}^n} \bar{Y}_{(n-1)(\pm m)}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \Big\} \\
& - \frac{3(n+1)v_{I(\pm 1)r}}{2n} \left\{ \dot{R}_{I(n-1)\pm(m-1)} + \frac{(n-2)\dot{R}_{I0}R_{I(n-1)\pm(m-1)}}{(2n-1)R_{I0}} \right. \\
& - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{(n-1)(n-m)!}{(n+m-2)!} \frac{R_{I0}^{n-2} q_{J0}}{L_{IJ}^n} \bar{Y}_{(n-1)\pm(m-1)}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \Big\} \\
& + \frac{3(n+1)(n-m)(n-m-1)v_{I(\mp 1)r}}{2n} \left\{ \dot{R}_{I(n-1)\pm(m+1)} + \frac{(n-2)\dot{R}_{I0}R_{I(n-1)\pm(m+1)}}{(2n-1)R_{I0}} \right. \\
& - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \frac{(n-1)(n-m-2)!}{(n+m)!} \frac{R_{I0}^{n-2} q_{J0}}{L_{IJ}^n} \bar{Y}_{(n-1)\pm(m+1)}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ}) \Big\}, \\
& n \geq 3, \quad 1 \leq m \leq n
\end{aligned} \tag{A.8}$$

ただし、式(A.8)の  $R_{I(n-1)\hat{m}}$  ( $\hat{m}=\pm m$  または  $\pm(m+1)$ ) において、 $|\hat{m}| > n-1$  のときには、 $R_{I(n-1)\hat{m}}=0$  とする ( $\dot{R}_{I(n-1)\hat{m}}$  および  $\bar{Y}_{(n-1)\hat{m}}(\theta_{IJ}, \psi_{IJ})$  についても同様)。

式(A-1)~(A-3)の右辺に現れる  $q_{J1m}$  および  $\dot{q}_{J1m}$  ( $-1 \leq m \leq 1$ ) は以下のように近似される。

$$q_{J1m} \approx - \frac{R_{J0}^3 v_{Jmr}}{2} \tag{A.9}$$

$$\dot{q}_{J1m} \approx - \sum_{\substack{K=1 \\ K \neq J}}^N \frac{R_{J0}^3 \dot{q}_{K0}}{L_{JK}^2} \frac{(1-|m|)!}{(1+|m|)!} \bar{Y}_{1m}(\theta_{JK}, \psi_{JK}) \tag{A.10}$$